C. F. v. WEIZSÄCKER

DIE ATOMKERNE



[illegible]

Wm. [illegible]
25 March 65

PHYSIK UND CHEMIE

UND IHRE ANWENDUNGEN IN EINZELDARSTELLUNGEN

BAND II

DIE ATOMKERNE

VON

C. F. VON WEIZSÄCKER



1937

AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT M. B. H.

LEIPZIG

DIE ATOMKERNE

GRUNDLAGEN UND ANWENDUNGEN IHRER THEORIE

VON

DR. HABIL. C. F. VON WEIZSÄCKER
BERLIN

MIT 40 FIGUREN
UND 1 AUSSCHLAGTAFEL



1 9 3 7

AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT M. B. H.

LEIPZIG

Printed in Germany
Druck: Bibliographisches Institut AG., Leipzig

Vorwort

Das rasch anwachsende Erfahrungsmaterial über die Atomkerne läßt die Aufstellung einer erschöpfenden Theorie noch nicht zu, zeigt aber durchweg die Richtigkeit und Fruchtbarkeit gewisser theoretischer Grundvorstellungen. Das vorliegende Buch wendet sich einerseits an experimentell eingestellte Leser, die eine Übersicht über den gesicherten Teil dieser Kerntheorie gewinnen wollen, andererseits an Theoretiker, die sich für ihren weiteren Ausbau interessieren. Dementsprechend sind alle wichtigen Abschnitte in zwei Teile gegliedert, von denen der erste ohne Verwendung der mathematischen Hilfsmittel der Quantenmechanik die Grundzüge des beobachteten Phänomens qualitativ deutet, während der zweite die quantitative Fassung der im ersten Teil eingeführten Vorstellungen bringt. Inhaltlich stellt das erste Kapitel die Grundlagen der Theorie im Anschluß an die Arbeiten von HEISENBERG zusammen, das zweite Kapitel bringt ihre Anwendung auf den Kernbau, das dritte Kapitel ihre Anwendung auf die Kernreaktionen (GAMOWS Theorie des α-Zerfalls und Theorie der Zertrümmerung unter Berücksichtigung der von BOHR in jüngster Zeit eingeführten konsequenten Behandlung des Vorgangs als Mehrkörperproblem), das vierte Kapitel bespricht die in der Entwicklung begriffene Theorie des β-Zerfalls nach dem Ansatz von FERMI.

Mein Dank gilt vor allem Herrn Prof. W. HEISENBERG. Das Buch verdankt seiner Beratung und Kritik die wichtigste Förderung; mehrere Abschnitte sind Ausarbeitungen der von ihm in Vorlesungen und privaten Diskussionen gegebenen Darstellung. Ferner danke ich den Herren Prof. H. SCHÜLER und Dr. H. SCHMIDT in Potsdam für die Durchsicht einer Zusammenstellung der Kernmomente, die der Tabelle 2 in § 13 zugrunde liegt, cand. O. AUGUSTIN in Leipzig für die Durchführung der langwierigen numerischen Rechnungen und die Zeichnung der Figuren zu § 12 und cand. A. FLAMMERSFELD in Berlin-Dahlem für die Zusammenstellung der empirischen Daten zu § 40.

Berlin, September 1936

C. F. v. WEIZSÄCKER

Inhaltsverzeichnis

Erstes Kapitel

Die Grundlagen der Theorie

§ 1. Aufgaben und Entwicklung der Theorie

Nach der Atomtheorie der Chemie besteht jedes reine Element aus einer großen Anzahl chemisch gleichartiger Atome. Nach dem RUTHERFORD-BOHRschen Atommodell besteht jedes Atom wiederum aus einem Kern und einer Reihe von Elektronen, die den Kern umkreisen. Die moderne Atomphysik stellt sich die Aufgabe, die physikalischen und chemischen Eigenschaften der Materie soweit als möglich auf Eigenschaften der Atomkerne und der im Kraftfeld der Kerne gebundenen Elektronen zurückzuführen. Die Forschung der letzten zwanzig Jahre hat gezeigt, daß bis auf das Atomgewicht der Elemente, das im wesentlichen mit der Masse ihrer Atomkerne identisch ist, fast alle physikalischen und chemischen Erscheinungen auf den Eigenschaften der Elektronenhülle der Atome beruhen, und daß die Struktur dieser Elektronenhülle andererseits fast ausschließlich durch eine einzige Eigenschaft der Kerne, ihre elektrische Ladung, bestimmt ist. Dadurch gelang es, unabhängig von allen speziellen Annahmen über die Beschaffenheit der Kerne, eine geschlossene Theorie der Elektronenhülle zu entwickeln. Andererseits war es aus ebendemselben Grunde unmöglich, aus dem normalen physikalischen und chemischen Verhalten der Stoffe nähere Aufschlüsse über den inneren Bau ihrer Atomkerne zu gewinnen. Unser genaueres Wissen über die Atomkerne beruht daher hauptsächlich auf der Untersuchung von Vorgängen, bei denen so große Energien entwickelt werden, daß selbst die Kerne, diese stabilsten atomaren Gebilde, zu einer Änderung ihrer Konfiguration veranlaßt werden; daher rührt die Bedeutung der radioaktiven Stoffe und der in den letzten Jahren geschaffenen Apparaturen zur Erzeugung sehr hoher elektrischer Spannungen für die Kernphysik. Dazu kommen einige kleine Effekte, in denen die geringe Abweichung des Kraftfeldes der Kerne vom Feld einer elektrischen Punktladung eben noch spürbar wird, wie z. B. die Hyperfeinstruktur der Spektrallinien.

Die Kerntheorie sucht dieses Erfahrungsmaterial auf einige einfache Gesetzmäßigkeiten zurückzuführen. Ihr Mittel dazu ist die Annahme, die Kerne seien selbst wieder aus einfacheren Elementarbausteinen zusammengesetzt. Diese Annahme wird nahegelegt durch die Ganzzahligkeit der Atomgewichte und der Kernladungen und bewiesen durch den spontanen Zerfall der radioaktiven Kerne und durch die künstlichen Kernzertrümmerungen. Die Kerntheorie sieht ihre Aufgabe darin, aus dem physikalischen Verhalten der Kerne die Art dieser Zusammensetzung und die Eigenschaften der Kernbausteine zu ermitteln und von da aus rückwärts das gesamte Verhalten der Kerne verständlich zu machen. Sie ermöglicht dadurch gleichzeitig den Versuch, die Eigenschaften der Kernbausteine selbst wieder auf einfachere Prinzipien zurückzuführen, und liefert damit einen wichtigen Beitrag zur Fundierung der allgemeinen Theorie atomarer Gebilde. —

Vor der systematischen Darstellung des heutigen Standes der Kerntheorie, in der ihre Entstehung in enger Wechselwirkung mit dem Experiment und ihr Zusammenhang mit den prinzipiellen Fragen der Atomphysik nicht immer ausdrücklich hervorgehoben werden kann, wollen wir einen Abriß ihrer bisherigen Entwicklung und ihrer Stellung innerhalb der aktuellen Probleme der Quantentheorie geben.

Der erste Vorläufer der heutigen Vorstellung vom zusammengesetzten Atomkern ist die Hypothese von PROUT (1815), daß alle chemischen Elemente aus Wasserstoff aufgebaut seien. Die Kernphysik im heutigen Sinne begann aber erst mit dem von RUTHERFORD (1912) aufgestellten Modell des Kernatoms, das erlaubte, die aus der Chemie bekannten Ordnungszahlen und Atomgewichte der chemischen Elemente und die bei der Untersuchung der Radioaktivität gewonnenen Daten über die spontane Umwandlung der schwersten Elemente als physikalische Bestimmungsstücke der Atomkerne zu deuten. Eine Reihe neuer experimenteller Entdeckungen, deren wichtigste die erste künstliche Kernumwandlung durch RUTHERFORD und CHADWICK (1919) und der Nachweis der Isotopenzusammensetzung der stabilen Elemente durch ASTON (1920) waren, ließ allmählich ein qualitatives Bild von der Struktur der Atomkerne entstehen. Eine quantitative Kerntheorie wurde durch die Aufstellung der Quantenmechanik möglich, deren erste fruchtbare Anwendung auf Kernprobleme die Theorie des α-Zerfalls von GAMOW, CONDON und GURNEY (1928) war. Die Grundlage für eine allgemeine Quantentheorie der Kerne lieferte aber erst die experimentelle Entdeckung eines neuen Kernbausteins, des Neutrons, durch CURIE, JOLIOT und CHADWICK (1932). Den

Ausbau dieser Theorie hat HEISENBERG (1932) eingeleitet; ihre Voraussetzungen und Grenzen wurden durch die Theorie des β-Zerfalls von FERMI (1934) so weit klargelegt, wie es beim heutigen Stand der Quantenmechanik möglich erscheint. Gleichzeitig lieferten die großen experimentellen Fortschritte der letzten Jahre, vor allem die von COCKCROFT und WALTON (1932) eingeleiteten Kernumwandlungen durch künstlich beschleunigte Teilchen, die Entdeckung des Wasserstoffisotops durch UREY (1932), des positiven Elektrons durch ANDERSON (1933) und der künstlichen Radioaktivität durch CURIE und JOLIOT (1934) mit ihren Erweiterungen durch FERMI (1934/35), der Theorie ein immer breiter werdendes Anwendungsfeld.

Heute verspricht die Kerntheorie in zwei Richtungen fruchtbare Fortsetzungen. Das große Interesse, das die gesamte Kernphysik zur Zeit findet, geht in erster Linie auf die neuen experimentellen Möglichkeiten zurück, die sie bietet. Sie ist das verhältnismäßig noch am wenigsten durchforschte Gebiet der Atomphysik, das gleichzeitig, wenn auch vorläufig noch in weiter Ferne, große technische Anwendungsmöglichkeiten eröffnet. Die Hoffnungen, die Atomkerne als Energiequellen zu verwerten, dürften zwar sobald nicht erfüllt werden; aber als Hinweis auf den praktischen Nutzen der Kernphysik genügt, um ein Beispiel zu nennen, die Aussicht auf die baldige Verwendung der neuentdeckten radioaktiven Isotope zahlreicher Elemente als Indikatoren in der Chemie und Physiologie. Der Begriffsapparat der Quantentheorie der Kerne scheint nun im ganzen schon geeignet zu sein, die vorliegenden Erfahrungen richtig zu beschreiben; sein Ausbau wird daher auch bei der weiteren Entwicklung der experimentellen Kernphysik eine bedeutende Rolle spielen.

Außerdem wird die Kerntheorie aber für die Beantwortung der prinzipiellen Fragen der Quantentheorie wichtig werden. Die mathematische Form, die der Quantentheorie durch HEISENBERG, SCHRÖDINGER und DIRAC (1925/26) gegeben wurde, hat sich zwar durch die Erklärung aller Eigenschaften der Atomhülle glänzend bewährt; auch über ihre physikalische Deutung herrscht seit den Untersuchungen von BOHR und HEISENBERG (1927/28) über den Begriff der Komplementarität und über die Unbestimmtheitsrelation volle begriffliche Klarheit. Trotzdem kann die Quantentheorie damit nicht als abgeschlossen betrachtet werden. Einerseits ist es noch nicht gelungen, sie widerspruchsfrei mit den Forderungen der Relativitätstheorie zu vereinigen, und andererseits bietet sie in ihrer bisherigen Form noch keinen Hinweis auf die Existenz einer elektrischen Elementarladung in der Natur, die doch aller Wahr-

scheinlichkeit nach eng mit dem Quantenphänomen zusammenhängt. Der Versuch, auf rein theoretischem Wege, durch Analyse der vorhandenen Widersprüche die notwendige Erweiterung der Theorie zu erzwingen, ist bisher nicht gelungen. Zwar bedeutet die DIRACsche Theorie des Spinelektrons (1928) und ihre Erweiterung durch die „Löcher"-Vorstellung (1930) einen wesentlichen Fortschritt der Theorie, der durch die Entdeckung des positiven Elektrons eine überraschende Bestätigung fand; aber auch in ihrer heutigen Form ist die Löchertheorie noch nicht widerspruchsfrei.

Daher ist ein aus der Erfahrung stammender Hinweis auf die Richtung der künftigen Entwicklung wohl unerläßlich. Dazu sind Experimente notwendig, für deren Erklärung Quantentheorie und Relativitätstheorie gleichzeitig wesentlich werden, d. h. Experimente, in denen die Wirkung von Teilchen atomarer Größenordnung beobachtet werden kann, die sich nahezu mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Experimente dieser Art liegen heute nur in zwei Gebieten vor: in den Untersuchungen über die Höhenstrahlung und über die Atomkerne.

Die Experimente über die Höhenstrahlung zeigen direkt die Reaktionen von Elementarteilchen, deren kinetische Energien hoch über ihrer eigenen Ruhenergie liegen. Vor allem über die gegenseitige Umwandlung von Strahlung und Materie hat man durch sie schon wichtige Aufschlüsse gewonnen. Da aber eine einheitliche Deutung des Gesamtphänomens der Höhenstrahlung rein experimentell noch nicht gelungen ist, fehlt bis jetzt die Grundlage für weitergehende theoretische Schlüsse.

Die von den Atomkernen emittierten Elektronen bewegen sich ebenfalls fast mit der Geschwindigkeit des Lichtes. Darüber hinaus schien ursprünglich der gesamte Kernbau ein Problem der relativistischen Quantenmechanik zu sein, da die Bindungsenergien der Kerne von der Größenordnung der Ruhenergie des Elektrons sind. Nach der Entdeckung des Neutrons ist aber gerade deshalb so rasch ein gewisses Maß von Klarheit über den Kernbau erreicht worden, weil es sich als möglich erwies, die Kerne in einer gewissen Näherung nur aus Protonen und Neutronen zusammengesetzt zu denken, deren Ruhenergien wesentlich größer sind als die Bindungsenergien der Kerne. Die Kernphysik ist daher heute zum größten Teil ein Anwendungsgebiet der normalen, unrelativistischen Quantentheorie und bietet als solches keine Aufschlüsse über die ungelösten prinzipiellen Fragen. Aber die Schwierigkeiten sind nur zurückgeschoben. Die beim β-Zerfall emittierten Elektronen, die nach der älteren Vorstellung vor dem Zerfall im Kern gebunden waren, müssen nach der neuen

Ansicht im Augenblick des Zerfalls in irgendeiner Weise „entstehen“; die Erfahrungen über den β-Zerfall geben also auch nach dieser Vorstellung Auskunft über einen mit der bisherigen Theorie nicht beschreibbaren Prozeß. Ferner bildet die Struktur der beiden elementaren Kernbausteine Proton und Neutron und das Gesetz ihrer gegenseitigen Wechselwirkung einen Fragenbereich, der der heutigen Theorie unzugänglich ist und vielleicht, zusammen mit dem Problemkreis des β-Zerfalls, unmittelbar verwendbares Material für eine Theorie der Elementarteilchen liefern wird. Wenn die Kerntheorie heute die eindeutige Beschreibung aller quantenmechanisch beschreibbaren Kerneigenschaften anstrebt, so ist ihr wichtigstes Ziel dabei, gerade diese der bisherigen Quantenmechanik unzugänglichen Züge des Kernbaus klar herauszusondern und womöglich durch eine phänomenologische Darstellung ihrer Gesetzmäßigkeiten ihrem theoretischen Verständnis den Weg zu bahnen.

§ 2. Experimentelle Ergebnisse über den Kernbau

Eine Darstellung der experimentellen Kernphysik liegt nicht im Plan dieses Buches. Wir müssen aber diejenigen Eigenschaften der Kerne aufzählen, welche die Voraussetzung und das Erklärungsobjekt der Theorie bilden. Naturgemäß bedarf es bereits theoretischer Ansätze, um diese Kerneigenschaften aus den experimentellen Ergebnissen herauszuanalysieren; es ist aber möglich, sich dabei auf Gedankengänge zu beschränken, die unabhängig von der speziellen Kerntheorie als sicher gelten können. Wir unterscheiden die Eigenschaften der Kerne im Normalzustand (Kernbau) von ihrem Verhalten bei spontanen und erzwungenen Änderungen ihrer Konfiguration (Radioaktivität und künstliche Umwandlung).

Nach unserem heutigen Wissen ist die Struktur eines Kerns im Normalzustand durch zwei Konstanten bestimmt: seine Ladung und seine Masse.

Die elektrische Ladung der Kerne ist, wie die elektrische Neutralität des aus einem Kern und einer bestimmten ganzen Zahl von Elektronen bestehenden Atoms lehrt, stets ein ganzzahliges Vielfaches des elektrischen Elementarquantums. Die Kernladungszahl Z, die angibt, wievielmal die Elementarladung in der Kernladung enthalten ist, ist identisch mit der Ordnungszahl des betreffenden Elements im periodischen System.

Die Masse der Kerne ist nahezu ein ganzzahliges Vielfaches einer von der Masse des Wasserstoffkerns (Protons) nur wenig verschiedenen Einheit. Wenn zu jeder Kernladung nur eine bestimmte Masse gehörte, wäre die analog zur Kernladungszahl definierte Massenzahl A identisch mit

dem auf eine ganze Zahl abgerundeten chemischen Atomgewicht. Die meisten Elemente sind aber Gemische von Atomen verschiedener Massenzahl; die Konstanz der chemischen Atomgewichte beruht nur auf der Konstanz des Mischungsverhältnisses der chemisch nicht trennbaren Komponenten. Das geeignetste Mittel zur getrennten Bestimmung der Massenzahlen ist die von ASTON entwickelte Massenspektroskopie; dazu kommen kleine Aufspaltungen in den optischen Spektren, die von der verschiedenen Bewegung der Kerne verschiedener Masse herrühren.

Wenn Ladung und Masse den Kernbau vollständig bestimmen, müssen verschiedenartige Kerne gleicher Ladung sich in ihrer Masse unterscheiden (Isotope) und verschiedenartige Kerne gleicher Masse in ihrer Ladung (Isobare). Verschiedenartige Kerne gleicher Ladung und gleicher Masse (Isomere) scheinen in der Tat nicht vorzukommen[1]. Zur Charakterisierung eines Kerns genügt daher die Angabe der beiden Zahlen Z und A. Es ist üblich, dem chemischen Symbol des Elements Z als unteren und A als oberen Index anzuhängen. Z. B. hat der zum Element Sauerstoff gehörende Kern mit der Ladungszahl 8 und der Massenzahl 16 das Symbol $^{16}_{8}O$.

Die Kernmassen sind nicht genau ganzzahlig; insbesondere ist die wirkliche Masse eines Kerns der Massenzahl A stets um durchschnittlich etwa 1% geringer als das A-fache der Masse des Protons. Nimmt man also an, daß die Kerne aus Einheiten von der Masse des Protons (oder der sehr wenig davon verschiedenen Masse des Neutrons) bestehen, so fehlt ihnen etwas von der Masse, die sie nach naiver Rechnung haben sollten. Diesen Massendefekt identifiziert man mit der Bindungsenergie der Kerne. Ein Kern kann nur als stabiles Gebilde existieren, wenn Energie aufgewandt werden müßte, um ihn in seine Bestandteile zu zerlegen. Umgekehrt muß derselbe Energiebetrag frei werden, wenn man die Bestandteile zum Kern zusammenfügt (der Kernaufbau ist ein exothermer Prozeß); um diesen Betrag ist der Energiegehalt des fertigen Kerns kleiner als die Summe der Energieinhalte seiner Teile vor der Zusammenfügung. Da jedem Energiebetrag E nach der EINSTEINschen Gleichung

$$E = mc^2 \tag{2.1}$$

(c = Lichtgeschwindigkeit) eine bestimmte Masse m entspricht, muß auch

[1] Zwei Gegenbeispiele [$^{234}_{91}$(UZ) neben $^{234}_{91}$(UX$_2$) und $^{210}_{82}$Pb neben $^{210}_{82}$(RaD)] sind vorläufig wohl experimentell nicht genug gesichert, um in den Grundlagen der Theorie berücksichtigt zu werden; solange nicht andere Widersprüche gegen unsere Annahmen auftreten, die mit diesen beiden Fällen zusammen auf eine gemeinsame Ursache deuten, ist es wahrscheinlicher, daß sie durch eine Vervollkommnung der Experimente ihre Erledigung finden werden.

die Masse eines Kerns kleiner sein als die Summe der Massen seiner Bestandteile. Nach der Größe der Massendefekte zu schließen ist die Energie, die aufgewandt werden muß, um ein Proton (oder Neutron) aus dem Kern zu entfernen, ungefähr 1% seiner eigenen Ruhenergie, d. h. etwa 10 Millionen Volt ($1{,}6 \cdot 10^{-5}$ erg) oder das Hunderttausendfache der Ionisierungsarbeit des Wasserstoffatoms. Ein direkter Beweis für die Richtigkeit dieser Deutung der Massendefekte ist neuerdings aus den Energiebilanzen bei der künstlichen Umwandlung leichter Kerne gewonnen worden.

Wir stellen nun noch die übrigen empirisch bekannten Kerneigenschaften zusammen.

Als das Volumen eines Kerns bezeichnet man das Gebiet, in dem sein Kraftfeld nicht mehr dasjenige einer elektrischen Punktladung ist. Da die Kerne sich nicht wie starre Körper verhalten und zudem nicht mit jeder als Probekörper verwendbaren Teilchensorte in gleicher Weise wechselwirken, haben Begriffe wie Kernvolumen oder Kernradius jedoch keinen von der benutzten Meßanordnung unabhängigen allgemeinen Sinn. Immerhin ergeben die Wirkungsquerschnitte der Kerne für die Streuung und Einfangung von α-Teilchen, Protonen und Neutronen und die Lebensdauern der α-Strahler (nach der GAMOWschen Theorie des α-Zerfalls) übereinstimmend die Größenordnung von etwa $8 \cdot 10^{-13}$ cm für die Radien der schwersten Kerne und eine Abnahme ungefähr proportional zur dritten Wurzel aus dem Atomgewicht nach den leichten Kernen zu. Die Kernradien sind also ungefähr zehntausendmal geringer als die Atomradien.

Der Drehimpuls der Kerne, die ein magnetisches Moment besitzen, läßt sich durch seine Kopplung mit dem Drehimpuls der Elektronenhülle bestimmen, die sich in der Hyperfeinstruktur der Spektrallinien und im Intensitätswechsel der Linien in Bandenspektren äußert. Er ist gequantelt, und zwar ist er nach allen bisherigen Erfahrungen ein ganzzahliges Vielfaches von $\hbar$, wenn die Massenzahl des Kerns gerade ist, ein halbzahliges, wenn sie ungerade ist.

Das magnetische Moment der Kerne, das nicht gequantelt ist, läßt sich auf demselben Weg nur wesentlich ungenauer bestimmen. Bei den Isotopen von Wasserstoff ist es von STERN u. a. auch direkt durch die Ablenkung von Molekularstrahlen im inhomogenen Magnetfeld gemessen worden. Es ist bei allen Kernen größenordnungsmäßig tausendmal kleiner als das BOHRsche Magneton — $e\hbar/2mc$[1]).

[1]) Nach SCHÜLER (83) kann man aus gewissen Anomalien der Hyperfeinstruktur auch auf ein elektrisches Quadrupolmoment einiger Kerne schließen, das einer Abweichung der Dichteverteilung im Kern von der Kugelsymmetrie entspricht.

Aus dem Intensitätswechsel in Bandenspektren folgt auch eine Auskunft über das statistische Verhalten der Kerne, d. h. über die Frage, ob sie der BOSE- oder FERMI-Statistik genügen, ob also die Eigenfunktion eines Systems, dem zwei Kerne vom gleichen Typ angehören, in den Koordinaten dieser Kerne symmetrisch oder antisymmetrisch ist. Bisher hat sich stets für Kerne mit gerader Massenzahl BOSE-Statistik, für Kerne mit ungerader Massenzahl FERMI-Statistik ergeben.

Eine Eigenschaft des einzelnen Kerns, die freilich nur bei Kernumwandlungen beobachtet werden kann, ist die Lage seiner angeregten Zustände. Sie kann aus der Energie der elektromagnetischen Strahlung der Kerne (der γ-Strahlung), aus dem Auftreten verschiedener diskreter Energien der von radioaktiven oder künstlich umgewandelten Kernen emittierten Teilchen und aus Resonanzeffekten bei der künstlichen Umwandlung entnommen werden. Die Übereinstimmung zwischen den verschiedenen Versuchsergebnissen stellt zwar die Existenz diskreter angeregter Zustände und die Gültigkeit der BOHRschen Frequenzbedingung für die γ-Strahlen sicher; Termschemata nach dem Muster der optischen Spektren sind aber nur in den wenigsten Fällen bekannt.

Schließlich kann man einen Kern durch die Häufigkeit seines Vorkommens in der Natur charakterisieren. Die relative Häufigkeit der verschiedenen Isotopen eines Elements läßt sich durch massenspektroskopische Messungen ermitteln. Sehr viel unsicherer ist die geochemische oder astrophysikalische Bestimmung der absoluten Häufigkeit der Elemente. Immerhin ist eine Reihe von Häufigkeitsregeln empirisch gesichert, so vor allem, daß die Kerne mit gerader Massen- und Ordnungszahl weitaus die häufigsten sind.

§ 3. Experimentelle Ergebnisse über die Radioaktivität

Der radioaktive Zerfall besteht im spontanen Übergang eines Kernes in einen veränderten Zustand unter gleichzeitiger Emission eines materiellen Teilchens. Charakteristisch für einen Zerfallsprozeß ist die Wahrscheinlichkeit seines Eintretens, die Natur der emittierten Teilchen und deren Energie, Drehimpuls, statistisches Verhalten usw. sowie die Art der durch die Emission bedingten Zustandsänderung des Kerns.

Alle bekannten radioaktiven Kerne emittieren entweder Heliumkerne ($^4_2\mathrm{He}$ = „α-Teilchen"; α-Zerfall) oder positive oder negative Elektronen (kurz „Positronen" oder „Elektronen"; β-Zerfall). Masse und Ladung der Kerne ändert sich dabei gemäß den Erhaltungssätzen:

beim α-Zerfall nimmt die Massenzahl um vier, die Ladungszahl um zwei Einheiten ab; beim β-Zerfall bleibt die Massenzahl ungeändert (während der Massendefekt natürlich ein anderer wird), die Ladungszahl nimmt bei der Emission eines Positrons um eine Einheit ab, bei der Emission eines Elektrons um eine Einheit zu.

Zerfallsfähig sind zwei Gruppen von Kernen. Die natürlichen Radioaktiven umfassen im wesentlichen die schwersten, im periodischen System vorkommenden Elemente (Ordungszahlen von 81 an aufwärts); die künstlichen Radioaktiven sind in der Natur nicht vorkommende, aber durch künstliche Umwandlung herstellbare Isotope von Elementen aller Ordnungszahlen, deren Massenzahlen im allgemeinen höher oder niedriger sind als die des Komplexes der normalen, stabilen Isotope des betreffenden Elements (z. B. sind $^{13}_{7}N$ und $^{16}_{7}N$ radioaktiv, $^{14}_{7}N$ und $^{15}_{7}N$ stabil). Die natürlichen Radioaktiven emittieren entweder α-Teilchen oder Elektronen, die künstlichen entweder Positronen oder Elektronen, und zwar Positronen, wenn sie leichter sind als der Durchschnitt ihrer stabilen Isotope (z. B. $^{13}_{7}N$), Elektronen, wenn sie schwerer sind (z. B. $^{16}_{7}N$). Man kann diese letzte Gesetzmäßigkeit in die Regel fassen: der Zerfall geschieht so, daß der entstehende Kern, wenn möglich, stabil ist (z. B. $^{13}_{7}N \xrightarrow{\beta+} {}^{13}_{6}C$; $^{16}_{7}N \xrightarrow{\beta-} {}^{16}_{8}O$). — In die genannten Gruppen paßt die natürliche Radioaktivität einiger leichterer Elemente nicht ganz hinein; doch dürften die β-Strahler K, Rb, Nd dem Typ nach den künstlichen, der α-Strahler Sm den natürlichen Radioaktiven verwandt sein.

Die Kerne, die beim Zerfall der natürlichen Radioaktiven entstehen, sind meist selbst wieder radioaktiv. So ergeben sich Reihen von genetisch aufeinanderfolgenden radioaktiven Kernen, die jeweils bei einem der schwersten Elemente beginnen und bei einem stabilen Isotop von Blei enden. Da sich die Massenzahl nur um vier oder null Einheiten ändern kann, muß es im Prinzip mindestens vier verschiedene Reihen geben, deren Glieder nicht durch Zerfall ineinander übergehen. Empirisch bekannt sind nur drei Reihen[1]): die Thorium-Reihe ($^{232}_{90}Th$ bis $ThD = {}^{208}_{82}Pb$; Massenzahl der Form $4n$), die Uran-Radium-Reihe ($^{238}_{92}U$ bis $RaG = {}^{206}_{82}Pb$; Massenzahl der Form $4n + 2$) und die Aktiniumreihe ($^{231}_{91}Pa$ bis $AcD = {}^{207}_{82}Pb$; Massenzahl der Form $4n + 3$). Einige Elemente (ThC, RaC, AcC) sind gleichzeitig α- und β-aktiv: ein Teil ihrer Kerne zerfällt unter α-Emission in ein Element, das dann nur noch β-labil ist, ein anderer Teil zerfällt unter β-Emission in ein Element, das dann nur noch α-labil ist; durch

---

[1]) Elemente der vierten Reihe konnten in jüngster Zeit künstlich hergestellt werden.

den Zerfall der beiden Folgeprodukte entsteht wieder ein und derselbe Restkern (Verzweigung der radioaktiven Reihen).

Die Zerfallswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit („Zerfallskonstante“) gibt an, welcher Prozentsatz einer großen Zahl gleichartiger radioaktiver Kerne in der Zeiteinheit zerfällt. Der radioaktive Zerfall ist genau so wie z. B. die Lichtemission durch ein Hüllenelektron ein statistisches Phänomen. Wir kennen keine Kerneigenschaft, die erlaubte, den Augenblick des Zerfalls eines bestimmten individuellen Kernes vorauszuberechnen. Vielmehr ist die Zerfallswahrscheinlichkeit (und ihr reziproker Wert, die „mittlere Lebensdauer“) eine allen Kernen des gleichen Typs gemeinsame charakteristische Konstante, die insbesondere auch von der Vorgeschichte des Kerns unabhängig ist, d. h. davon, wie lange er schon in demselben Zustand war und auf welchem Wege er in diesen Zustand gekommen ist. Das erste folgt empirisch aus dem exponentiellen zeitlichen Abklingen des Zerfalls. Denn wenn die Zerfallswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit C unabhängig von der bereits verflossenen Verweilzeit im radioaktiven Zustand für alle Kerne gleichen Typs dieselbe ist, muß im Mittel in jedem Augenblick t die Zahl der pro Zeiteinheit zerfallenden Kerne dieses Typs proportional sein zur Zahl $N(t)$ der in diesem Augenblick vorhandenen derartigen Kerne:

$$-\frac{dN}{dt} = C \cdot N. \tag{3.1}$$

Daraus folgt durch Integration

$$N = N_0 e^{-C(t-t_0)}, \tag{3.2}$$

also der beobachtete exponentielle Abfall mit der Zeit. Die Unabhängigkeit der Zerfallswahrscheinlichkeit von der Entstehungsgeschichte des Kerns wird bewiesen durch die einheitliche Zerfallskonstante von RaD, das am Ende einer Verzweigung steht und daher auf zwei verschiedenen Wegen zustande kommt, sowie von mehreren, aus verschiedenen Ausgangselementen herstellbaren künstlichen Radioaktiven. Die Größe der mit Sicherheit gemessenen mittleren Lebensdauern der bekannten radioaktiven Kerne variiert zwischen 10^{-5} Sekunden und 10^{10} Jahren.

Hinsichtlich der Energie der emittierten Teilchen besteht ein grundsätzlicher Unterschied zwischen α- und β-Zerfall. Die kinetischen Energien der α-Teilchen haben diskrete, für den jeweiligen Zerfallsprozeß charakteristische Werte. Die Massendefekte der α-Strahler sind zwar nicht bekannt, es besteht aber kaum ein Grund, daran zu zweifeln, daß die Energie der α-Teilchen identisch ist mit der Energiedifferenz von

Anfangs- und Endkern. Ein starkes indirektes Argument für diese Annahme ist der Erfolg der auf ihr beruhenden GAMOWschen Theorie des α-Zerfalls. Bei einigen Zerfallsprozessen treten gleichzeitig mehrere diskrete α-Energien auf. Wir müssen annehmen, daß in diesen Fällen entweder der Anfangskern oder der Endkern in einem angeregten Zustand an dem Prozeß teilnimmt. In der Tat hat man in mehreren Fällen γ-Strahlen gefunden, deren Energien gleich den Differenzen zwischen den verschiedenen α-Teilchenenergien waren. Die Energien der α-Teilchen sind von der Größenordnung einiger Millionen Elektronenvolt, d. h. etwa $^1/_{200}$ der Ruhenergie des Protons.

Dagegen haben die β-Teilchen (und zwar sowohl Elektronen wie Positronen) ein kontinuierliches Energiespektrum, das von sehr geringen Energien bis zu einer für den jeweiligen Zerfallsprozeß charakteristischen, zwischen 10^4 und $12 \cdot 10^6$ Elektronenvolt liegenden oberen Grenze reicht. Diese obere Grenze spielt in mancher Hinsicht die Rolle der „Zerfallsenergie". Verfolgt man etwa die beiden durch die verschiedene Reihenfolge eines α- und eines β-Zerfalls unterschiedenen Wege bei der Verzweigung einer radioaktiven Reihe (z. B. ThC $\xrightarrow{\beta}$ ThC' $\xrightarrow{\alpha}$ ThD und ThC $\xrightarrow{\alpha}$ ThC'' $\xrightarrow{\beta}$ ThD), so ist die Summe der kinetischen Energie des α-Teilchens und der oberen Grenze des β-Energiespektrums (und der in einigen Fällen außerdem emittierten γ-Strahlen) längs beider Wege dieselbe. Es ist also möglich, diese obere Energiegrenze mit der Energiedifferenz zwischen Anfangs- und Endkern zu identifizieren. Eine Schwierigkeit entsteht aber dadurch, daß die Energie, die nach dieser Annahme emittiert werden müßte, in der tatsächlich beobachteten Strahlung nur zum Teil wiedergefunden wird. Da das Energiespektrum kontinuierlich ist, trägt das β-Elektron im allgemeinen nur einen Bruchteil der Energie der oberen Grenze; eine andere Strahlung (außer γ-Strahlen, deren Energie bereits in die Bilanz eingerechnet ist) hat man aber nie gefunden. Kalorimetrische Versuche haben gezeigt, daß die gesamte, von einem β-Strahler in der Zeiteinheit in seiner Umgebung erzeugte Wärmemenge gleich ist der Zahl der pro Zeiteinheit zerfallenden Kerne multipliziert mit der m i t t l e r e n Energie des kontinuierlichen Spektrums; würde die gesamte Energie der oberen Grenze bei diesem Prozeß frei, so hätte man Proportionalität mit dieser oberen Grenze erwarten müssen.

Der nächstliegende Ausweg wäre die Annahme, die Energiedifferenz zwischen Anfangs- und Endkern sei nicht gleich der oberen Grenze des Spektrums, sondern gleich der Energie des jeweils emittierten Elektrons. Man müßte dann aber, wie BOHR zuerst nachdrücklich betont hat, im Gegensatz zu allen sonstigen Erfahrungen folgern, daß es Kerne gebe, deren Energie nicht quantisiert sei; vor allem bei den künstlich radio-

aktiven Isotopen leichter Kerne, bei denen ziemlich genaue Energiebilanzen aufgestellt werden können, käme man zu direkten Widersprüchen. Es bleibt also nur die Wahl zwischen der Annahme, der fehlende Energiebetrag werde von einer bis jetzt nicht beobachtbaren, sehr durchdringenden Strahlung davongetragen, und der Annahme, er verschwinde spurlos. Die erste Vermutung wurde von PAULI ausgesprochen. Das von ihm zu diesem Zweck erfundene neue Teilchen darf, um die Erhaltung der Ladung und der Massenzahl nicht zu verletzen, nicht elektrisch geladen und nicht wesentlich schwerer als das Elektron sein, und muß, um der Entdeckung bis jetzt entgangen zu sein, eine wesentlich geringere Wechselwirkung mit Materie haben als γ-Strahlung derselben Energie. Es wird zur Unterscheidung von dem schwereren Neutron als „Neutrino" bezeichnet. FERMI hat gezeigt, daß die Neutrinohypothese eine Art quantenmechanischer Theorie des β-Zerfalls ermöglicht, die mit der Erfahrung befriedigend übereinstimmt. Die zweite Alternative würde eine Verletzung des Energiesatzes beim β-Zerfall bedeuten. Auf das Bestehen dieser Möglichkeit hat BOHR hingewiesen, ehe der Zusammenhang zwischen der oberen Grenze des Energiespektrums und der Energiebilanz des Zerfalls deutlich hervorgetreten war. Durch die neueren Entdeckungen hat die Neutrinohypothese sehr an Wahrscheinlichkeit gewonnen. Wir werden sie daher im folgenden als den angemessensten Ausdruck der bis jetzt vorliegenden Erfahrungen verwenden. Es sei aber hervorgehoben, daß damit bestenfalls eine erste Annäherung an die Wirklichkeit erreicht ist. Es ist sehr wohl möglich, daß sich bei einer Verfeinerung der Theorie von FERMI die Eigenschaften des „Neutrinofeldes" als so verschieden von denen normaler Materie ergeben, daß es zweifelhaft werden kann, wieweit das Neutrino den Namen eines materiellen Teilchens verdient.

Der Drehimpuls der emittierten Teilchen relativ zum Kern ist nicht direkt gemessen. Allgemeine Überlegungen zeigen aber, daß hier wieder Schwierigkeiten beim β-Zerfall zu erwarten sind. Nach allen bisherigen Erfahrungen ist es durch die Massenzahl eines Kerns bestimmt, ob sein Drehimpuls ein ganz- oder halbzahliges Vielfaches von $\hbar$ ist. Beim β-Zerfall, der die Massenzahl ungeändert läßt, dürfte sich der Drehimpuls des Kerns daher nur um Null oder ein ganzzahliges Vielfaches von $\hbar$ ändern. Andererseits hat das Elektron, und nach der Löchertheorie auch das Positron, einen halbzahligen Drehimpuls. Um mit dem Erhaltungssatz des Drehimpulses nicht in Konflikt zu kommen, muß man wieder das Neutrino zu Hilfe ziehen und ihm neben der überschüssigen Energie auch einen Drehimpuls $\frac{1}{2}\hbar$ zu tragen geben.

Das statistische Verhalten der emittierten Teilchen (der Symmetriecharakter der Eigenfunktionen) macht beim β-Zerfall ebenfalls Schwierigkeiten, wenigstens solange man das emittierte Elektron als Kernbestandteil ansieht. Man kann leicht beweisen, daß sich ein zusammengesetztes Gebilde nach der Fermi- bzw. Bose-Statistik verhält, je nachdem, ob es eine ungerade oder gerade Anzahl von Bestandteilen enthält, die selbst der Fermi-Statistik genügen. Da das Elektron selbst der Fermi-Statistik gehorcht, müßte das statistische Verhalten des Kerns sich bei der Emission eines einzelnen Elektrons ändern. Andererseits hängt, soweit wir wissen, auch der Typ der Statistik eines Kerns nur von seiner Massenzahl ab. Man kann sich aus der Notlage ziehen, indem man dem Neutrino zu seinen anderen Eigenschaften noch die Fermi-Statistik verleiht.

§ 4. Experimentelle Ergebnisse über die erzwungenen Kernreaktionen

Kernreaktionen lassen sich erzwingen durch die Beschießung mit rasch bewegten materiellen Teilchen (α-Teilchen, Deuteronen, Protonen, Neutronen) oder harten Lichtquanten. Charakteristisch für eine erzwungene Kernreaktion ist wieder die Wahrscheinlichkeit ihres Eintretens, die Natur, Energie und Richtungsverteilung der bei der Reaktion emittierten Teilchen in ihrer Abhängigkeit von der Natur und der Energie des Geschosses sowie die Zustandsänderung des Kernes, an dem die Reaktion vor sich geht.

Ein Steckenbleiben des Geschosses im Kern ohne gleichzeitige Emission irgendeines Teilchens würde im allgemeinen der Erhaltung von Energie und Impuls widersprechen. Denn heiße die Masse des ursprünglichen, ruhenden Kerns m_K, die des Geschosses m_G, die Geschwindigkeit des Geschosses vor dem Stoß v, die des neugebildeten Gesamtkerns v', so fordert der Impulssatz

$$m_G v = (m_K + m_G) v', \tag{4.1}$$

und der Energiesatz, wenn nur die kinetischen Energien in Betracht gezogen werden,

$$\tfrac{1}{2} m_G v^2 = \tfrac{1}{2} (m_K + m_G) v'^2. \tag{4.2}$$

Die beiden Bedingungen sind miteinander unverträglich; wird z. B. der Impulssatz befriedigt, so bleibt ein Überschuß der ursprünglichen kinetischen Energie über die kinetische Energie nach dem Stoß von der Größe

$$\varDelta E = \frac{1}{2} \frac{m_K m_G}{m_K + m_G} v^2. \tag{4.3}$$

Bei analogen Stößen makroskopischer Teilchen wird dieser Überschuß in Wärme, d. h. in innere Energie des entstehenden Gebildes übergeführt; da aber die inneren Energien der Kerne gequantelt sind, wäre das nur für ganz bestimmte Werte der Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses möglich. Im allgemeinen muß der überschüssige Energiebetrag daher als kinetische Energie eines emittierten Teilchens oder als γ-Strahlungsenergie wieder ausgesandt werden. In der Tat sind Einfangungen von Teilchen ohne eine derartige Energieaussendung nicht beobachtet worden.

Emittiert werden kann entweder das Geschoß selbst oder ein anderes Teilchen. Im ersten Fall spricht man von Streuung, und zwar von elastischer Streuung, wenn die innere Energie des Kerns unverändert bleibt, von unelastischer Streuung, wenn der Kern angeregt wird. Im zweiten Fall liegt eine künstliche Umwandlung, oder, wie man drastischer aber minder korrekt auch sagt, eine Zertrümmerung des Kerns vor. Streuung und Umwandlung können auch gekoppelt auftreten; in fast allen bisher beobachteten Fällen der künstlichen Umwandlung scheint das Geschoß aber im Kern steckenzubleiben. Emittiert werden dabei als „Kernsplitter" wieder Protonen, Neutronen und schwerere Kerne sowie Lichtquanten, dagegen keine Elektronen oder Positronen. Masse und Ladung des Kerns ändern sich wieder gemäß den Erhaltungssätzen. Wenn die entstehenden Kerne in Massenzahl und Ladung mit einer bekannten stabilen Kernsorte übereinstimmen, sind sie, soweit unsere Erfahrungen reichen, auch in ihren übrigen Eigenschaften von ihnen ununterscheidbar. Kommt ihre Kombination von Massenzahl und Ladung unter den bekannten „natürlichen" Kernen nicht vor, so sind sie im allgemeinen β-aktiv; von diesen Kernen, den künstlichen Radioaktiven, stammen die bei Zertrümmerungen beobachteten Elektronen und Positronen, soweit sie nicht Sekundärprodukte einer γ-Strahlung sind.

Reaktionsfähig scheinen alle Kerne zu sein, wenn die energetischen Bedingungen für eine Reaktion gegeben sind. Da die entstehenden Kerne sich in das Schema der bekannten Elemente einfügen, kann man die Kernumwandlungen wie chemische Reaktionen schreiben. Z. B. lautet die Formel der Umwandlung von Stickstoff in ein Sauerstoffisotop durch α-Teilchen unter Emission von Protonen:

$$^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{17}_{8}\mathrm{O} + {}^{1}_{1}\mathrm{H}\,. \tag{4.4}$$

Die Erhaltungssätze drücken sich dabei in der Bedingung aus, daß weder die Summe der oberen Indizes noch die der unteren Indizes der Partner sich bei der Reaktion ändern darf.

Die Reaktionswahrscheinlichkeit wird gemessen durch den Wirkungsquerschnitt des Kerns für den betreffenden Prozeß, d. h. durch denjenigen geometrischen Querschnitt, den man dem Kern zur Erklärung der beobachteten Häufigkeit der Reaktion geben müßte, wenn alle die und nur die (punktförmig gedachten) Geschosse, die einen Kern treffen, die Reaktion auslösten. Die beobachteten Wirkungsquerschnitte liegen zwischen 10^{-21} und 10^{-30} cm². Daß die Wirkungsquerschnitte einiger Prozesse größer sind als die geometrischen Querschnitte der Kerne (10^{-24} bis 10^{-25} cm²), scheint zunächst paradox, da demnach selbst Teilchen, die den Kern gar nicht treffen, mit ihm reagieren müßten; die Erklärung dürfte in einem wellenmechanischen Resonanzeffekt liegen (§ 25—26).

Die Energie der emittierten Teilchen läßt sich als Funktion des Winkels zwischen den Flugrichtungen des Geschosses und des emittierten Teilchens aus der Energie-Impuls-Bilanz berechnen. Dabei muß in die Energiebilanz außer den kinetischen Energien noch die Differenz der Bindungsenergien von Anfangs- und Endkern, also die „Wärmetönung" der Reaktion, eingesetzt werden. Diese Energiebilanzen sind durch die Erfahrung durchweg bestätigt worden und bilden wenigstens für die am besten untersuchten leichten Kerne heute das genaueste Mittel zur Bestimmung der Bindungsenergien.

Die Richtungsverteilung der emittierten Teilchen bei gegebener Flugrichtung des Geschosses ist besonders interessant im Falle der elastischen Streuung, weil sie unmittelbare Rückschlüsse auf das zwischen Kern und Geschoß wirkende Kraftgesetz erlaubt. Im übrigen bestätigen die bisher vorliegenden Erfahrungen auch hier die Anwendbarkeit der quantenmechanischen Vorstellungen.

Die Kernreaktionen vermitteln uns die direkteste Auskunft über die Teilchen, die als Kernbausteine in Betracht kommen. Diese Teilchen sind daher im folgenden noch einmal gesondert zusammengestellt und im einzelnen besprochen.

Tabelle 1. Teilchen, die bei Kernreaktionen emittiert werden

Symbol	Name	Ladung	Masse M.E.	Drehimpuls	Magnetisches Moment μ_K	Art der Statistik
$^4_2$He	α-Teilchen . . .	$+2e$	4,0034	0	0	Bose
$^2_1$D	Deuteron . . .	$+e$	2,0142	$\hbar$	$+0{,}7 \pm 0{,}2$	Bose
$^1_1$H	Proton	$+e$	1,0081	$\frac{1}{2}\hbar$	$+2{,}8 \pm 0{,}5$	Fermi
$^1_0$n	Neutron	0	1,0090	$\frac{1}{2}\hbar$	$-2{,}0 \pm 0{,}6$	Fermi
e^-	Elektron	$-e$	0,000543	$\frac{1}{2}\hbar$	-1840	Fermi
e^+	Positron	$+e$	0,000543	$\frac{1}{2}\hbar$	$+1840$	Fermi
—	Neutrino	0	0?	$\frac{1}{2}\hbar$	?	Fermi

Das α-Teilchen tritt als Zerfallsprodukt bei radioaktiven Prozessen und künstlichen Umwandlungen auf. Wir brauchen es trotzdem nicht als Elementarteilchen, sondern nur als eine besonders stabile Verbindung der Elementarbestandteile der Kerne anzusehen. Als experimenteller Beweis für seine zusammengesetzte Natur kann die Zertrümmerung von Lithium durch Protonen gelten, die nach der Formel

$$^7_3\text{Li} + {}^1_1\text{H} = 2\,{}^4_2\text{He}$$

vor sich geht. Da der Lithiumkern ursprünglich höchstens ein ganzes α-Teilchen enthalten konnte, muß sich das zweite α-Teilchen aus dem Rest des Kerns und dem Proton im Augenblick der Zertrümmerung neu gebildet haben.

Das Deuteron scheint bei einer künstlichen Umwandlung als Kernsplitter ausgelöst zu werden. Es kann durch hinreichend harte γ-Strahlung direkt in Bestandteile zerlegt werden, gemäß der Formel

$$^2_1\text{D} + h\nu = {}^1_1\text{H} + {}^1_0\text{n}\,.$$

Das Proton tritt als Kernsplitter bei zahlreichen Zertrümmerungen auf. Es existiert als stabiler Kern; eine experimentelle Möglichkeit, es weiter in Bestandteile zu zerlegen, ist nicht bekannt. — Als Kuriosität sei erwähnt, daß neuerdings auch die Existenz eines Protons mit negativer Ladung vermutet worden ist. Theoretisch hat dieser Gedanke nach der Entdeckung des Positrons einige Wahrscheinlichkeit für sich; Hinweise auf eine Beteiligung des „negativen Protons“ am Kernaufbau bestehen hingegen nicht[1]).

Das Neutron wurde als Kernsplitter bei Zertrümmerungen entdeckt und ist seitdem niemals in einem anderen Zusammenhang beobachtet worden. Über die Frage einer Zerlegbarkeit oder einer natürlichen Labilität des Neutrons (etwa gegen Umwandlung in ein Proton unter Emission eines β-Teilchens) ist experimentell nichts bekannt, da es nicht möglich ist, Neutronen nach dem Prozeß, dem sie ihre Entstehung verdanken, längere Zeit festzuhalten und zu beobachten. Über die theoretischen Konsequenzen, die aus dem Phänomen des β-Zerfalls auf die Struktur des Neutrons und des Protons gezogen werden können, vgl. § 7.

Den bisher aufgezählten Teilchen, die wir im Gegensatz zu den Elektronen beider Vorzeichen und dem hypothetischen Neutrino als „schwere Teilchen“ bezeichnen wollen, ist gemeinsam, daß sie bei Zertrümmerungsprozessen unmittelbar als Kernsplitter in Erscheinung treten können,

[1]) Man müßte denn die beiden ungeklärten Fälle von anscheinender Isomerie (S. 6) in dieser Richtung deuten wollen.

und daß bei allen Reaktionen, an denen sie beteiligt sind, die Sätze von der Erhaltung der Energie und des Impulses in unmittelbar prüfbarer Weise erfüllt sind. Da nach GAMOW auch die langen Lebensdauern der radioaktiven α-Strahler, die kein Analogon in den Phänomenen der Atomhülle zu besitzen scheinen, durch den quantenmechanischen „Tunneleffekt" erklärt werden können (§ 19), bieten die Kernreaktionen, an denen nur schwere Teilchen beteiligt sind, überhaupt keine der Quantenmechanik fremden Erscheinungen dar.

Das Elektron erscheint als Zerfallsprodukt radioaktiver Kerne, aber, soweit unser Wissen reicht, niemals als Kernsplitter unmittelbar nach der Beschießung eines Kerns durch ein schweres Teilchen oder ein γ-Quant. Umgekehrt ist auch noch nie eine Kernzertrümmerung durch ein Elektron beobachtet worden. Man hat zwar theoretisch zu erwarten, daß sehr schnelle Elektronen durch ihr elektrisches Feld mit geringer Ausbeute diejenigen Kerne zertrümmern, die durch das Feld von Lichtquanten gleicher Energie zertrümmert werden können; jedenfalls scheint aber kein davon unabhängiger Effekt vorhanden zu sein, der auf typische „Kernkräfte" zurückgeführt werden könnte. Das Elektron ist nach dem heutigen Stand des Wissens ein „Elementarteilchen": es kann zwar, in Verbindung mit einem Positron, aus Strahlung entstehen und wieder in Strahlung umgewandelt werden, aber es läßt sich nicht in mehrere Bestandteile zerlegen.

Das Positron tritt bei eigentlichen Kernprozessen nur als Zerfallsprodukt künstlich radioaktiver Kerne auf; es verhält sich hierbei in jeder Beziehung wie das Elektron. Zu dem Prozeß, bei dem das Positron entdeckt wurde, der Entstehung von Paaren von Elektronen verschiedenen Ladungsvorzeichens, bedarf es zwar ebenfalls eines Kernes. Der Kern wirkt aber in diesem Falle nur durch sein elektrisches Feld; der Prozeß greift in die Kernstruktur nicht ein und läßt sich daher ebenso ohne Kenntnis des Kernbaues durchrechnen und liefert umgekehrt ebensowenig Aufschluß über den Kernbau wie jeder andere Prozeß in der Atomhülle; wir werden deshalb im folgenden auf eine nähere Behandlung dieses Vorgangs verzichten. Das Positron ist in demselben Sinne ein Elementarteilchen wie das Elektron, mit dem es nach der DIRACschen Löchertheorie auch genetisch verwandt ist.

Das Neutrino ist für uns vorläufig nur eine Vokabel, welche die Richtung andeutet, in der wir die Lösung der Schwierigkeiten des β-Zerfalls suchen. Charakteristisch für diese Schwierigkeiten ist jedenfalls, daß sie nur in Verbindung mit einem spontanen Umwandlungsprozeß auftreten,

der nicht — wie die Emission von α-Teilchen — auch durch Beschießung der Kerne mit hinreichend energiereichen Teilchen jederzeit erzwungen werden kann; gleichzeitig dem einzigen Kernprozeß, an dem „leichte Teilchen" sichtbar mitwirken.

§ 5. Kernbausteine und Kernmechanik

Die erste Aufgabe der Kerntheorie ist es, die einfachsten Bausteine der Kerne zu ermitteln. Da das α-Teilchen und das Deuteron selbst wieder zusammengesetzt sind, kommen von den im letzten Abschnitt aufgezählten Teilchen nur Proton, Neutron, Elektron und Positron in Betracht, die letzteren eventuell in Verbindung mit dem Neutrino. Wir stellen nun mit HEISENBERG die Behauptung auf:

Als selbständige Teilchen existieren im Kern nur Protonen und Neutronen. Elektronen und Positronen sind im Kern nicht fertig vorgebildet; sie entstehen vielmehr erst im Augenblick der Emission durch einen mit der bisherigen Theorie nicht beschreibbaren Prozeß, bei dem gleichzeitig nach dem Erhaltungssatz der Ladung ein Neutron in ein Proton umgewandelt wird oder umgekehrt.

Die einfachste Begründung für diese Behauptung ist die folgende: Als Bestandteile eines zusammengesetzten Gebildes bezeichnet man die Teile, in die man es durch äußere Eingriffe zerlegen kann. Eine solche Zerlegung geschieht bei den Kernen durch die künstlichen Umwandlungsprozesse. Bei diesen Prozessen werden immer nur schwere Teilchen aus dem Kern herausgeschlagen; also sind nur schwere Teilchen Kernbestandteile. Die einzigen schweren Teilchen, die nicht aus anderen schweren Teilchen zusammengesetzt sind, sind Neutron und Proton. Leichte Teilchen sind im Kern nicht frei vorhanden, da sie sonst bei künstlichen Umwandlungen auch gelegentlich auftreten müßten. Ihre Emission hat offenbar mit der inneren Struktur der Protonen und Neutronen selbst zu tun; dieses Problem scheint aber von dem Problem des Kernbaus in derselben Weise losgelöst werden zu können wie das Problem des Kernbaus selbst von dem Problem des Baus der Atomhülle. Man darf also versuchen, zuerst den Kernbau zu verstehen, indem man die Eigenschaften der Protonen und Neutronen bloß phänomenologisch beschreibt, um erst in einem späteren Stadium auf die Theorie der Natur dieser Teilchen einzugehen.

Über die Bündigkeit dieser Argumentation ließe sich nur abschließend urteilen, wenn wir die gesuchte Kerntheorie bereits besäßen; die Bewältigung eines neuen Erfahrungsgebiets läßt sich ja stets nur durch einen

Sprung, durch eine ohne Erfolgsgarantie gewagte Annahme einleiten. Für unsere Wahl gibt es immerhin noch einige empirische Gründe.

Dafür, daß es nur zwei verschiedene Kernbausteine gibt, spricht die Tatsache, daß ein Kern durch die Angabe von zwei Zahlen (z. B. A und Z) vollständig charakterisiert werden kann. Daß die Ganzzahligkeit des Kernspins und das Eintreten der Bose-Statistik an die Geradzahligkeit der Massenzahl A gebunden ist, läßt sich am zwanglosesten durch die Annahme erklären, der Kern sei aus A schweren Teilchen der Masse eins zusammengesetzt, die sämtlich halbzahligen Drehimpuls und Fermi-Statistik haben, d. h. aus Protonen und Neutronen (die Annahme über Drehimpuls und Statistik des Neutrons ist durch direkte Beobachtung nicht verifiziert; sie erscheint aber theoretisch plausibel und frei von Einwänden). Fügt man die Einschränkung der Anzahl der Kernbausteine auf zwei als Bedingung hinzu, so bleibt von allen Kombinationen bekannter Teilchen nur diese im Einklang mit der genannten Gesetzmäßigkeit.

Wenn die leichten Teilchen im Kern frei vorhanden wären, so müßten ferner im selben Kern Elektronen und Positronen enthalten sein, da durch Umwandlungsprozesse aus einem und demselben Ausgangskern sowohl elektronen- wie positronenemittierende β-Strahler hergestellt werden können. Andererseits ist es bekannt, daß außerhalb der Atomkerne Elektronen und Positronen, die sich in demselben kleinen Raumgebiet befinden, binnen kurzer Zeit unter Emission von Strahlung vernichtet werden; es wäre also merkwürdig, wenn sie im Kern in stabiler Form nebeneinander existieren könnten.

Ein letztes Argument hängt bereits eng mit der zweiten Aufgabe der Kerntheorie zusammen, der Bestimmung der Wechselwirkungsgesetze zwischen den Kernbausteinen. Diese Aufgabe zerfällt wieder in zwei Teilaufgaben: die Frage nach dem allgemeinen Schema mechanischer Gesetzmäßigkeiten, nach dem die Kernvorgänge beschrieben werden müssen (also vor allem nach der Anwendbarkeit der Quantenmechanik), und die Frage nach den speziellen Kraftgesetzen, welche die Wechselwirkung zwischen den einzelnen Kernbausteinen vermitteln. Die Antwort, die wir auf die erste der beiden Fragen geben müssen, ist nun, wie Bohr zuerst betont hat, abhängig von dem Ansatz über die Natur der Kernbausteine, zu dem wir uns entschließen. Bestehen die Kerne nämlich nur aus schweren Teilchen, so haben wir Grund zu der Annahme, daß der Kernbau den Gesetzen der Quantenmechanik unterliegt; dagegen wäre schon der bloße Aufenthalt von leichten Teilchen im Kern quantenmechanisch nicht zu verstehen.

Nehmen wir an, ein im Kern gebundenes Teilchen der Masse m genüge der Quantenmechanik, und betrachten wir es für einen Augenblick als frei, so können wir auf seine Bewegung die Unbestimmtheitsrelation anwenden. Da das Teilchen sich mit Sicherheit im Kern befindet, ist sein Ort bis auf eine Unbestimmtheit von der Größenordnung des Kernradius r bekannt; sein Impuls muß also mindestens eine Unbestimmtheit der Größe

$$\Delta p \approx \frac{\hbar}{r} \tag{5.1}$$

haben. Dem entspricht (unter Berücksichtigung der Relativitätstheorie) eine unbestimmte kinetische Energie (d. h. Gesamtenergie minus Ruhenergie)

$$\Delta E \approx c\sqrt{m^2 c^2 + (\Delta p)^2} - mc^2. \tag{5.2}$$

Ist ΔE klein gegen mc^2 (unrelativistischer Grenzfall), so geht (5.2) über in den Ausdruck

$$\Delta E \approx \frac{1}{2m}(\Delta p)^2; \tag{5.3}$$

ist ΔE umgekehrt groß gegen mc^2 (Teilchengeschwindigkeit nahezu gleich der Lichtgeschwindigkeit), so geht (5.2) über in

$$\Delta E \approx c\Delta p. \tag{5.4}$$

Berücksichtigen wir, daß die Radien der einfachsten Kerne von der Größenordnung des klassischen Elektronenradius

$$r \approx \frac{e^2}{m_e c^2} = 2{,}8 \cdot 10^{-13}\,\text{cm} \tag{5.5}$$

sind, so folgt für Elektronen und Positronen Gültigkeit von (5.4) und

$$\Delta E \approx \frac{\hbar c}{e^2} m_e c^2 \approx 137\, m_e c^2. \tag{5.6}$$

Für schwere Teilchen, deren Masse M 1840mal größer ist als die Elektronenmasse, gilt dagegen näherungsweise Gleichung (5.3), d. h.

$$\Delta E \approx \frac{1}{2M}\left(\frac{\hbar}{e^2/m_e c^2}\right)^2 \approx \left(\frac{\hbar c}{e^2}\right)^2 \frac{m_e}{M} m_e c^2 \approx \frac{137^2}{2 \cdot 1840} m_e c^2 \approx 10\, m_e c^2. \tag{5.7}$$

Anschaulich ausgesprochen: auf denselben Raum beschränkt hat ein Elektron wegen seiner kleineren Masse eine größere Nullpunktsenergie als ein Proton oder Neutron.

Um das Teilchen im Kern festzuhalten, muß die potentielle Energie der Bindung an den Kern größer sein als diese kinetische Nullpunktsenergie. Nun kennen wir die potentielle Energie der Teilchen im Kern nicht unmittelbar; wir kennen nur ihren Überschuß über die kinetische Energie, der als Bindungsenergie (Massendefekt) gemessen wird. Um eine

erste Abschätzung zu gewinnen, können wir in Analogie zu den Erfahrungen der Atomhülle annehmen, die Bindungsenergie sei ungefähr ebenso groß wie die kinetische Energie. Nun ist die Bindungsenergie pro Teilchen in den einfachsten Kernen ungefähr gleich der zehn- bis zwanzigfachen Ruhenergie des Elektrons. Größer darf also die kinetische Nullpunktsenergie eines Teilchens nicht sein, wenn es nach den Gesetzen der Quantenmechanik möglich sein soll, das Teilchen im Kern festzuhalten. Ein Vergleich mit Gleichung (5.6) und (5.7) zeigt, daß die Bedingung für schwere Teilchen genau erfüllt ist, während die kinetische Energie der Elektronen etwa um einen Faktor zehn zu groß ist. — Die Überlegung ist noch nicht streng, weil wir die Teilchen im Kern als frei betrachtet und die Kernenergien einigermaßen willkürlich abgeschätzt haben. Löst man jedoch die Schrödingergleichung für ein gebundenes Teilchen, so ergibt sich in einem Abstand vom Kern, in dem die potentielle Energie zwischen Kern und Teilchen klein gegen die Bindungsenergie ist, ein exponentieller Abfall der Eigenfunktion mit dem Faktor $e^{-\sqrt{2mE+E^2/c^2}\cdot r/\hbar}$, wobei E die Bindungsenergie ist. Das heißt, daß die Ortsungenauigkeit eines gebundenen Teilchens nicht kleiner sein kann als

$$\Delta q \approx \frac{\hbar}{\sqrt{2mE + \frac{E^2}{c^2}}}, \tag{5.8}$$

ganz unabhängig von der Größe der potentiellen und der kinetischen Energie je für sich. Unsere Abschätzung war also genau richtig.

Wir schließen daraus: Die Kernenergien sind nicht hinreichend, um nach der Quantenmechanik ein Elektron oder Positron in einem Gebiet von Kerndimensionen festzuhalten; sie stehen dagegen gerade in der Relation zu den Kerndimensionen, die man nach der Unbestimmtheitsrelation der Quantenmechanik zu erwarten hätte, wenn die Kerne nur aus schweren Teilchen aufgebaut wären. Wenn die Kerne nur aus Protonen und Neutronen bestehen, so dürfen wir daher die Gültigkeit der Quantenmechanik in den Kernen erwarten; umgekehrt ist jede Bestätigung quantenmechanischer Gesetzmäßigkeiten bei Kernprozessen ein Argument für diese Hypothese.

§ 6. Die Wechselwirkungskräfte zwischen den Kernbausteinen

Zur Durchführung der Quantentheorie des aus Protonen und Neutronen aufgebauten Kerns müßten wir noch die Kräfte kennen, die zwischen diesen Kernbausteinen wirken. Mit dieser Frage haben wir die dringendste

Aufgabe der gegenwärtigen Kerntheorie erreicht. Einen theoretisch begründeten allgemeinen Ansatz über diese Kräfte besitzen wir nicht. Wir sind daher angewiesen auf die unmittelbaren Erfahrungsdaten, welche die quantitative Erforschung des Kernbaus und der Kernreaktionen uns bieten, und auf einige theoretische Konsequenzen, die sich aus den Eigenschaften des β-Zerfalls ziehen lassen; beim heutigen Stand sind die Informationen der ersten Art aber noch unvollständig, die der zweiten Art ungewiß. Gesucht sind drei Kraftgesetze: zwischen Proton und Proton, zwischen Proton und Neutron und zwischen Neutron und Neutron.

Die unmittelbarste experimentelle Auskunft über atomare Kraftgesetze liefern Stoßversuche. So hat RUTHERFORD durch die elastische Streuung von α-Teilchen an Kernen die Gültigkeit des COULOMBschen Gesetzes bestätigt und auch die Abweichungen von seiner Gültigkeit bei kleinen Abständen vom Kernmittelpunkt entdeckt. Zur quantitativen Bestimmung der nichtcoulombschen Kernkräfte wären aber größere Geschoßenergien als die heute erreichbaren notwendig; so existieren für sie nur Größenordnungsabschätzungen. Zwischen Proton und Proton ist eine Abweichung vom COULOMBschen Abstoßungsgesetz bei kleinen Abständen wahrscheinlich, aber noch nicht sicher erwiesen. Zwischen Proton und Neutron besteht in Abständen, die groß sind gegen die Kerndimensionen, keine merkliche Wechselwirkung; in Abständen von etwa $5 \cdot 10^{-13}$ cm an abwärts herrscht eine starke Kraft zwischen beiden Teilchen, die ja seinerzeit zur Entdeckung des Neutrons geführt hat. Über die Wechselwirkung zwischen Neutron und Neutron ist aus Stoßversuchen nichts bekannt.

Die Stärke der Kernkräfte läßt sich aus Stoßversuchen und aus der Größe der Massendefekte abschätzen. Die Bindungsenergien pro Teilchen in den einfachsten Kernen sind zehn- bis zwanzigmal größer als die Ruhenergie des Elektrons. Andererseits sind die Radien der einfachsten Kerne, wie z. B. des α-Teilchens, das zwei Protonen und zwei Neutronen enthält, etwa gleich dem klassischen Elektronenradius. Der klassische Elektronenradius ist aber (bis auf Faktoren der Größenordnung eins) definiert als der Radius derjenigen ungefähr homogenen Ladungsverteilung, deren elektrostatischer Energieinhalt, bei einer Gesamtladung von der Größe der elektrischen Elementarladung, gleich der Ruhenergie des Elektrons ist. Näherungsweise können wir daher auch den elektrostatischen Energieinhalt der einfachsten Kerne gleich der Ruhenergie des Elektrons setzen. Daraus folgt, daß die potentielle Energie, die ein Teilchen im Kern unter dem Einfluß der spezifischen „Kernkräfte“ hat, wenigstens zehn- bis zwanzigmal größer ist als die elektrostatische Energie der Kernprotonen.

Weitere Schlüsse erlaubt die Symmetrie zwischen Protonen und Neutronen, die sich in der Verteilung der stabilen Kerne äußert. Die Massenzahlen der stabilen Kerne sind in erster Näherung gleich dem doppelten ihrer Ladungszahlen; die Kerne enthalten also ungefähr gleichviele Neutronen wie Protonen. Die einfachste Deutung dieses Sachverhalts ist die Annahme, daß in den Kernen nur zwischen Proton und Neutron, nicht aber zwischen gleichartigen Teilchen, beträchtliche Kräfte wirksam seien. Denn wegen der Gleichheit von Aktion und Reaktion wird dann durch die Kraftwirkungen keine der beiden Teilchensorten vor der anderen ausgezeichnet. Tragen wir also (Fig. 1) die Energieinhalte aller Kerne einer gegebenen Massenzahl A als Funktion der Anzahl Z der in ihnen enthaltenen Protonen auf, so muß die entstehende Kurve um den Punkt $Z = \frac{A}{2}$ symmetrisch sein; ein Kern von X Protonen und $A - X$ Neutronen muß denselben Energieinhalt haben wie ein Kern von X Neutronen und $A - X$ Protonen. Da wir die Wechselwirkung zwischen gleichartigen Teilchen zunächst ganz vernachlässigen wollen, muß ferner der Energieinhalt des ganz aus Protonen oder ganz aus Neutronen bestehenden Kerns ($Z = 0$ und $Z = A$) verschwinden. Bei nicht zu absonderlichem Kraftverlauf kann man demnach erwarten, daß die tiefste Energie (stärkste Bindung) an der Symmetriestelle $Z = \frac{A}{2}$ eintritt. Nun vermag ein Kern durch Emission positiver oder negativer β-Elektronen bei fester Massenzahl seine Protonenanzahl Z zu vermindern oder zu vermehren; man wird also annehmen müssen, daß alle Kerne, die rechts oder links von dieser Symmetriestelle liegen, durch β-Zerfall in einen Zustand tieferer Energie übergehen und ihre Zusammensetzung daher derjenigen der am stärksten gebundenen Kerne annähern. Dafür spricht auch die empirische Regel, daß der β-Zerfall der künstlichen Radioaktiven im allgemeinen so erfolgt, daß der entstehende Kern stabil ist.

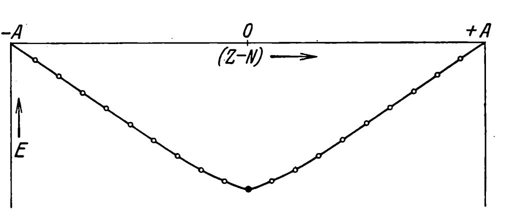


Fig. 1. Energieinhalt als Funktion der Differenz zwischen Protonen- und Neutronenzahl bei fester (ungerader) Massenzahl.

Die Annahme, daß nur zwischen Proton und Neutron beträchtliche Kräfte wirken, ist also hinreichend zur Erklärung der empirischen Symmetrie zwischen beiden Teilchensorten. Sie ist aber nicht notwendig; Kräfte zwischen gleichen Teilchen, die aber zwischen Proton und Proton

nach demselben Gesetz wirken wie zwischen Neutron und Neutron, können außerdem vorhanden sein. Daß bei den schwereren Kernen die Neutronenzahl empirisch mehr und mehr überwiegt, kann man auf die COULOMBsche Abstoßung zurückführen, die eine zu große Anhäufung von Protonen auf engem Raum energetisch ungünstig macht.

Wichtig ist ferner die Tatsache, daß sowohl die Bindungsenergien wie die Volumina der Kerne ungefähr zur Kernmasse, also zur Teilchenzahl im Kern proportional sind. Dies erinnert an das Verhalten von Flüssigkeiten und festen Körpern. Genau wie bei der Erklärung dieser Aggegratzustände (VAN DER WAALSsche Theorie) wird man annehmen, daß jeder Kernbaustein ein ganz bestimmtes Volumen beansprucht und im wesentlichen nur mit seinen unmittelbaren Nachbarn in Wechselwirkung steht. Denn dann wird die Zunahme des Volumens und des Energieinhalts eines Kerns, die bei der Hinzufügung eines neuen Teilchens eintritt, eine von der Anzahl der schon vorhandenen Teilchen unabhängige Konstante. Zur Erklärung dieses Verhaltens muß man entweder annehmen, daß die Anziehung zwischen Proton und Neutron bei einem bestimmten, kleinen Abstand der Teilchen wieder in eine sehr starke Abstoßung übergeht, oder daß es sich nicht um eine normale Anziehungskraft, sondern um eine Wechselwirkung vom Typus der chemischen Valenzkräfte handelt, die nach Bindung einer bestimmten Zahl von Teilchen „abgesättigt" ist.

Für eine quantitative Formulierung und Nachprüfung unserer Ansätze stehen vor allem die genau gemessenen Massendefekte zahlreicher leichter Elemente zur Verfügung. Doch sind die mathematischen Schwierigkeiten einer Theorie der komplizierteren Kerne zu groß, um ein rasches Vordringen auf diesem Wege erhoffen zu lassen. Über eine Reihe von Näherungsverfahren vgl. das zweite Kapitel. —

Aus den Eigenschaften des β-Zerfalls lassen sich auf indirektem Wege einige Vermutungen über die Kernkräfte gewinnen. Das Auftreten des β-Zerfalls zwingt uns zu der Annahme, daß Proton und Neutron nicht völlig unveränderliche „Elementarteilchen" sind, sondern sich unter günstigen energetischen Bedingungen unter Emission eines Positrons bzw. Elektrons ineinander umwandeln können. Da nach der DIRACschen Löchertheorie die Emission eines Positrons im wesentlichen denselben Prozeß darstellt wie die Absorption eines Elektrons, kann sich ein Proton vermutlich auch unter Absorption eines Elektrons in ein Neutron verwandeln und ein Neutron umgekehrt unter Absorption eines Positrons in ein Proton. Hieraus folgt, wenn man die Vorstellungen der Quantenmechanik so weit anwenden darf, unmittelbar das Vorhandensein einer Wechselwirkung

zwischen Neutron und Proton. Es muß nämlich dann auch vorkommen können, daß ein Neutron sich unter Emission eines Elektrons in ein Proton verwandelt und sofort danach ein benachbartes Proton dieses Elektron absorbiert und sich dadurch in ein Neutron verwandelt; derselbe Prozeß kann sich auch dadurch vollziehen, daß das Proton ein Positron emittiert, das von dem Neutron verschluckt wird. Am Ende des Vorganges haben Proton und Neutron nur den Platz getauscht. Der Prozeß ist daher im ganzen ohne Zuführung äußerer Energie möglich und wird nach allgemeinen quantenmechanischen Gesetzmäßigkeiten auch dann stattfinden, wenn der Zwischenzustand energetisch höher liegt als der Anfangszustand, das Neutron also an sich zur Emission eines β-Teilchens energetisch nicht imstande ist.

Dieser Vorgang muß nun auch zu einer mit dem Ladungsaustausch verbundenen Kraftwirkung zwischen Proton und Neutron führen. Man macht sich dies am leichtesten durch einen Vergleich mit einem analogen Vorgang in der Atomhülle klar. Die Kraft, die im Wasserstoffmolekülion die COULOMBsche Abstoßung zwischen den beiden Kernen überwindet und die Molekülbindung bewirkt, beruht auf dem periodischen Platzwechsel des Hüllenelektrons zwischen den beiden Kernen, der bei großen Abständen der Kerne voneinander als ein langsames Fluktuieren der Ladung zwischen beiden Kernen erscheint und bei geringeren Abständen und stärker werdender Bindung in einen Umlauf des Elektrons um beide Kerne zugleich übergeht. Der Analogieschluß auf den Ladungsaustausch zwischen Proton und Neutron ist zwar nicht zwingend, solange wir die Gesetze des β-Zerfalls nicht kennen; immerhin liefert die beste Annäherung an die Wirklichkeit, die wir heute besitzen, die FERMIsche Theorie des β-Zerfalls, das Auftreten der „Austauschkraft“ als notwendige Konsequenz. Ihre Größe läßt sich wegen der Unbestimmtheit des Ansatzes von FERMI noch nicht theoretisch ableiten. Dagegen folgt aus der Theorie, daß sie gerade denjenigen Absättigungscharakter hat, den wir oben als eine der beiden möglichen Erklärungen für das flüssigkeitsähnliche Verhalten der Kernmaterie genannt haben. Es erscheint als einfachster und angesichts dieser Übereinstimmung aussichtsreicher Versuch, außer den Austauschkräften und der elektrostatischen Abstoßung der Protonen keine weiteren Kernkräfte anzunehmen.

Aus der Theorie des β-Zerfalls folgt neben der Austauschkraft zwischen Proton und Neutron in höherer Näherung auch eine Austauschwechselwirkung zwischen gleichen Teilchen. Sind z. B. zwei Neutronen gegeben, so kann gleichzeitig jedes der beiden je ein Elektron emittieren und daraufhin das von dem anderen Neutron emittierte Elektron absorbieren. Genau

derselbe Prozeß kann zwischen zwei Protonen durch den Austausch von zwei Positronen stattfinden; diese Kräfte zwischen gleichen Teilchen stören also, wie wir oben gefordert haben, die Symmetrie zwischen den beiden Sorten schwerer Teilchen nicht.

Wenn es gelänge, einen eindeutigen Ansatz für die Theorie des β-Zerfalls zu finden, so könnten auch die Kraftgesetze, die wir suchen, quantitativ abgeleitet werden; das Problem der Kernkräfte wäre dann — die Richtigkeit unserer Annahmen vorausgesetzt — von der theoretischen Seite her gelöst. Vorläufig kennen wir weder den Kraftverlauf als Funktion der Teilchenabstände noch das Größenverhältnis der Kraft zwischen Proton und Neutron zur Kraft zwischen gleichen Teilchen. Die FERMIsche Theorie macht es lediglich wahrscheinlich, daß die Kräfte mit einer hohen Potenz des Abstandes abfallen und daß die Kraft zwischen Proton und Neutron, die in niedrigerer Näherung auftritt, fühlbar größer ist als die Kräfte zwischen gleichartigen Teilchen.

§ 7. Die prinzipielle Situation der Kerntheorie

Die Annahmen, die wir der Kerntheorie zugrunde legen wollen, lassen sich in folgende Sätze zusammenfassen:

1. Die Kerne sind zusammengesetzte Gebilde. Ihre Bausteine sind die schweren Teilchen Proton und Neutron.
2. Die Bewegung der Kernbausteine gehorcht den Gesetzen der Quantenmechanik.
3. Unter günstigen energetischen Umständen kann sich ein Neutron unter Emission eines Elektrons in ein Proton und ein Proton unter Emission eines Positrons in ein Neutron verwandeln. Gleichzeitig verschwindet ein weiterer Energiebetrag, dessen hypothetischer Träger den Namen Neutrino erhalten hat.
4. Die Kraftwirkung zwischen den schweren Teilchen wird durch virtuelle Emission und Reabsorption von leichten Teilchen vermittelt. In einer gewissen Annäherung läßt diese Kraftwirkung sich als „Austauschkraft" zwischen den schweren Teilchen darstellen. Hinzu kommt die elektrostatische Abstoßung der Protonen.

Bevor wir an den Ausbau der Kerntheorie gehen, fragen wir uns: Wie fügt dieses Kernmodell sich unseren geläufigen physikalischen Vorstellungen ein? Wo liegen seine Gültigkeitsgrenzen? Welche Hinweise liefert es für die weitere Entwicklung?

Wir vergleichen die Kerntheorie, die wir anstreben, mit der abgeschlossenen Theorie der Atomhülle. Nach dem RUTHERFORD-BOHRschen Modell besteht das Atom aus Kern und Elektronen. Das Argument für diese Behauptung ist dasselbe, das wir für das HEISENBERGsche Kernmodell angeführt haben: Kern und Elektronen sind die einzigen Teilchen, die bei Stoßversuchen als Atomsplitter in Erscheinung treten. Außer diesen beiden Teilchen emittieren die Atome zwar auch noch Lichtquanten. Diese können aber nicht durch Stoß unmittelbar aus dem Atom herausgelöst werden; sie werden vielmehr nach Verlauf einer mittleren Lebensdauer, die eine Eigenschaft des angeregten Atomzustandes ist, vom Atom spontan emittiert. Man pflegt daher nicht zu sagen, die Lichtquanten seien vor der Emission im Atom als Bestandteile enthalten, sondern sie seien im Augenblick der Emission „entstanden". Die Analogie zum Verhalten der leichten Teilchen bei Kernprozessen ist deutlich.

Eine Seite des Sachverhalts wird aber durch die scharfe Unterscheidung zwischen „Bausteinen" und „bei Übergängen entstandenen Teilchen" verdeckt. Vor der Emission waren die Lichtquanten zwar nicht als Lichtquanten im Atom vorhanden. Immerhin befand sich aber im Atom die Energie des elektromagnetischen Feldes, die nur eine Zustandsänderung aus der Erscheinungsform der potentiellen Energie des Coulombfeldes in die Erscheinungsform der quantenhaften Strahlung durchgemacht hat. Das elektromagnetische Feld muß aber durchaus auch als „Baustein" oder wenigstens als „Mörtel" des Atoms betrachtet werden; es hält als der einzige Träger der Wechselwirkung zwischen Kern und Elektronen das Atom erst zusammen. Wenn unsere Hypothese über die Austauschkräfte richtig ist, stehen im Kern die schweren Teilchen und das durch die virtuelle Existenz der leichten Teilchen geschaffene Feld einander in derselben Weise als „Bausteine" und „Mörtel" gegenüber. Die Analogie wird noch enger, wenn man beachtet, daß auch die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen zwei geladenen Teilchen in der Quantenelektrodynamik in der Form einer virtuellen Emission und Reabsorption von Lichtquanten auftritt.

Diese Analogie gibt nun zugleich einen Hinweis auf die Gültigkeitsgrenzen des Modells. BOHR hat klargelegt, daß das Modell der Atomhülle nur eine Idealisierung ist und nur für solche Probleme zu Recht besteht, bei deren Behandlung die SOMMERFELDsche Feinstrukturkonstante $\frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$ als klein gegen Eins betrachtet werden darf. Die Feinstrukturkonstante mißt das Verhältnis der Elektronengeschwindigkeit im Atom

zur Lichtgeschwindigkeit. Wäre dieses Verhältnis von der Größenordnung Eins, so wäre die Wechselwirkung der Elektronen mit dem Strahlungsfeld ebenso groß wie ihre Wechselwirkung mit dem Kern oder mit einem von außen kommenden Stoßpartner; damit wären aber in der Tat die Voraussetzungen des BOHRschen Atommodells aufgehoben. Die angeregten Zustände hätten dann nämlich nicht mehr Lebensdauern, die lang sind gegen die Eigenperioden des Atoms, und daher könnte ihnen überhaupt keine wohldefinierte stationäre Energie zugeschrieben werden; der Vorstellung von der Lichtemission als einer Umwandlung elektromagnetischer Energie aus der statischen Erscheinungsform in die Form der Strahlung wäre die Basis entzogen. Solange wir aber keine abgeschlossene Theorie der Wechselwirkung zwischen Strahlung und Materie haben, ist die dem BOHRschen Modell zugrunde liegende Idealisierung der einzige Weg zu einer Annäherung an die wirkliche Atomstruktur. Mit anderen Worten: Das Modell der Atomhülle ist für alle die Probleme genügend, bei denen es erlaubt ist, das dynamische Gebilde des elektromagnetischen Feldes durch das statische COULOMBsche Feld zu ersetzen. Es erlaubt ferner, auch die nichtstatischen Effekte als Störung in erster Näherung korrekt zu berücksichtigen (Theorie der Lichtemission und der Feinstruktur der Spektrallinien). Bei der Behandlung der Effekte höherer Näherung zeigen sich dagegen die ungelösten Schwierigkeiten der Strahlungstheorie, deren hervorstechendste das Auftreten einer unendlich großen elektromagnetischen Wechselwirkung des Elektrons mit sich selbst ist. Diese Schwierigkeiten werden wohl nur durch eine Theorie behoben werden können, welche Materie und Strahlung („Bausteine“ und „Mörtel“) nicht mehr ohne innere Verwandtschaft einander gegenüberstellt, sondern auf eine einheitliche Wurzel zurückführt.

Dieselben Gültigkeitsgrenzen haben wir für das Kernmodell zu erwarten. In der Näherung, in der die Wechselwirkung zwischen schweren und leichten Teilchen klein ist gegen die Wechselwirkung der schweren Teilchen untereinander, kann das dynamische Gebilde „Feld der leichten Teilchen“ durch das statische Austauschfeld approximiert werden. In dieser Näherung darf man die Kerne als zusammengesetzt aus Protonen und Neutronen betrachten und nach der Quantenmechanik behandeln. Die Genauigkeit dieser Annäherung dürfte, der Analogie folgend, gegeben sein durch das Verhältnis der Geschwindigkeit der schweren Teilchen im Kern zu der der leichten Teilchen beim Ladungsaustausch oder bei der β-Emission, d. h. praktisch wieder zur Lichtgeschwindigkeit. Die wahre Dynamik des Feldes der leichten Teilchen ist wahrscheinlich sehr verschieden

von der Dynamik des Strahlungsfeldes. So wie es aber in der DIRACschen Strahlungstheorie möglich war, die unbekannten exakten Gesetze der Wechselwirkung zwischen Materie und Strahlung mit Hilfe der Forderung der Korrespondenz zur klassischen Theorie in erster Näherung richtig darzustellen, so darf man auch für die Theorie der Entstehung der leichten Teilchen im Kern die Aufstellung eines in erster Näherung korrekten Ansatzes versuchen. Dies hat FERMI in seiner, der Strahlungstheorie formal genau nachgebildeten Theorie des β-Zerfalls getan. Diese Theorie liefert in der Tat nach dem soeben geschilderten Schema die Austauschkraft zwischen den schweren Teilchen und ergibt auch in zweiter Näherung eine unendliche, durch das Feld der leichten Teilchen vermittelte Wechselwirkung der schweren Teilchen mit sich selbst. Wir kennen allerdings kein korrespondenzmäßiges Analogon für sie, in das sie im klassischen Grenzfall so übergehen müßte, wie die Quantentheorie der Strahlung und ihrer Wechselwirkung mit der Materie in die MAXWELL-LORENTZsche Theorie übergeht. Daher herrscht in ihr eine noch nicht behobene Unbestimmtheit über den elementaren Wechselwirkungsansatz, die eine quantitative Bestätigung bis jetzt verhindert hat und immerhin eine gewisse Vorsicht im Gebrauch der theoretischen Vorstellungen nahelegt.

HEISENBERG hat die oben entwickelten Vorstellungen in einem Schema der folgenden Art zusammengefaßt:

	Atomhülle	Atomkern	
Elementare Bausteine	Kern, Elektronen	Protonen, Neutronen	
Bei Übergängen emittierte Teilchen	Lichtquanten	Elektronen, Positronen, Neutrinos	Lichtquanten (γ-Strahlung)
Das ihnen zugeordnete Feld	Elektromagnetisches Feld	Feld der leichten Teilchen	Elektromagnetisches Feld
Erste Näherung der Wechselwirkungskräfte zwischen den Bausteinen	Elektrostatische Kräfte (COULOMB-feld)	Austauschkräfte	Elektrostatische Kräfte
Korrespondenzmäßige Beschreibung der Teilchenemission bei Übergängen	DIRACsche Strahlungstheorie	FERMIsche Theorie des β-Zerfalls	DIRACsche Strahlungstheorie

Die Bedeutung dieser Vorstellungen liegt hauptsächlich darin, daß sie gestatten, die Schwierigkeiten der Kernphysik zu lokalisieren. Indem wir zunächst einmal zugeben, daß wir die Eigenschaften der Protonen

und Neutronen nicht verstehen und sie als Erfahrungsdaten hinnehmen, gelingt es, den Rest der Kernphysik, den Aufbau der Kerne aus diesen Teilchen, von allen scheinbaren Widersprüchen zu reinigen. Ist insbesondere die Anwendbarkeit der Quantenmechanik in diesem Gebiet einmal gesichert, so können wir von dort aus rückwärts zu einer zunächst rein phänomenologischen Theorie der Elementarbausteine selbst vorstoßen. Über die Richtung dieser kaum begonnenen Entwicklung seien noch ein paar Vermutungen ausgesprochen:

Man ist versucht zu fragen, ob Proton und Neutron denn nun „wirkliche Elementarteilchen" seien, oder ob vielleicht das Neutron aus einem Proton und einem Elektron oder das Proton aus einem Neutron und einem Positron bestehe. Man wird auf diese Frage antworten müssen, daß der Begriff des unveränderlichen Elementarteilchens die Erfahrungen nicht mehr adäquat beschreibt. Am vorsichtigsten ist es, Proton und Neutron als verschiedene Zustände derselben Elementarpartikel „schweres Teilchen" anzusehen, die unter Wechselwirkung mit dem Felde der leichten Teilchen ineinander umgewandelt werden können. Die Möglichkeit des Entstehens und Vergehens von materiellen Teilchen, die auch durch die gegenseitige Umwandlung von γ-Quanten und Elektronenpaaren illustriert wird, zeigt deutlich, daß die charakteristische Eigenschaft der „Elementarteilchen" nicht die Unveränderlichkeit durch äußere Kräfte im Sinne der älteren Atomvorstellung ist, sondern nur die Unfähigkeit zu kontinuierlichen Zustandsänderungen; also ein Quantenphänomen gleich der rein kinematisch begründeten Existenz der stationären Zustände der Atome.

Diese Relativierung des Begriffs „Elementarteilchen" hängt vermutlich eng mit der nächsten Aufgabe der prinzipiellen Quantentheorie zusammen. Die bisherige Mechanik beruht auf der Gegenüberstellung des leeren Schemas der Bewegungsgesetze und des besonderen, durch die Natur der gerade betrachteten materiellen Gebilde bestimmten Kraftansatzes, durch den dieses Schema erst auf die Wirklichkeit anwendbar wird. Z. B. war es die zuerst von Bohr klar erkannte eigentümliche Schwierigkeit in der Theorie der Atomhülle von der Aufstellung des Rutherfordschen Modells bis zur Entdeckung der Quantenmechanik, daß man zwar das Kraftgesetz zwischen den Atombestandteilen in guter Näherung kannte, aber angesichts des Versagens der klassischen Mechanik nicht wußte, in welches kinematische Schema man es einzusetzen hatte. Umgekehrt sind der heutigen Kerntheorie die Bewegungsgesetze der Quantenmechanik gegeben; dagegen muß sie die für Kernbausteine charakteristischen Kraftgesetze erst aus der Erfahrung bestimmen. Eine noch tiefer dringende

Theorie der atomaren Erscheinungen wird aber verständlich machen müssen, warum es nur Elementarteilchen ganz bestimmter, spezieller Eigenschaften gibt. Dazu wird weder die Entdeckung eines neuen kinematischen Schemas geeignet sein, das doch wieder auf beliebige Kraftansätze anwendbar wäre, noch die Entdeckung neuer, fundamentaler Kraftgesetze, solange nicht gezeigt wird, warum eben nur diese und nicht auch andere Kraftgesetze in der Natur vorkommen können. Soweit eine Lösung der Aufgabe überhaupt möglich ist, muß vielmehr eine innere Beziehung zwischen den beiden Seiten der Mechanik gefunden werden; es muß, wenn so konkrete Vermutungen schon gewagt werden können, deutlich werden, daß die in der Natur geltenden Bewegungsgesetze und die Eigenschaften der in der Natur vorkommenden Elementarteilchen einander gegenseitig bedingen. Die Annäherung des Begriffs des Elementarteilchens an den rein kinematischen Begriff des stationären Zustandes ist vielleicht ein erster Schritt in dieser Richtung.

Zweites Kapitel

Kernbau

1. Phänomenologische Theorie

§ 8. Allgemeine Systematik der Bindungsenergien

Die deduktive Theorie des Kernbaus, die wir anstreben, setzt eine phänomenologische Ordnung des Erfahrungsmaterials voraus. Als Ausgangspunkt wählen wir die beiden Fragen: Wie muß ein Kern zusammengesetzt sein, um existenzfähig (stabil) zu sein; und: Wie hängt die Bindungsenergie der stabilen Kerne sowie die Zerfallsenergie der instabilen Kerne von ihrer Zusammensetzung ab? Nach der Quantenmechanik ist die Antwort auf die erste Frage im Prinzip durch die Antwort auf die zweite Frage mitgegeben. Wenn nämlich der energetisch tiefste Zustand eines Systems von Z Protonen und N Neutronen dadurch erreicht werden kann, daß man sie zu einem einheitlichen Kern ${}^{Z+N}_{Z}\mathrm{X}$ zusammenfügt, dann ist dieser Kern stabil; entsteht dagegen ein energetisch tieferer Zustand, wenn man die Protonen und Neutronen in zwei oder mehr Teilkernen sammelt, so wird der Kern ${}^{Z+N}_{Z}\mathrm{X}$ früher oder später in diese Teile zerfallen. Die Lebensdauer eines instabilen Kernes hängt allerdings von speziellen Eigenschaften der bindenden Kräfte ab; so kann ein in Wahrheit labiler Kern wegen seiner langen Lebensdauer als stabil erscheinen (vgl. weiter unten die Frage der α-Labilität der schwereren Kerne). Im allgemeinen darf man aber annehmen, daß ein als stabil bekannter Kern eine tiefere Energie besitzt als alle Kerne, in die er durch Zerfall übergehen könnte; und umgekehrt scheint die Erfahrung zu lehren, daß alle oder nahezu alle in diesem Sinn stabilen Kerne wirklich in der Natur vorkommen, da nach den bisherigen Beobachtungen alle bei natürlichen oder künstlichen Umwandlungen neu entstehenden Kerne entweder instabil oder mit schon bekannten stabilen Kerntypen identisch sind.

Da ein Kern durch die beiden Teilchenzahlen Z und N vollständig charakterisiert ist, muß sich demnach unser gesamtes Wissen über die Energieinhalte und die Stabilität der Kerne in der Angabe einer Funktion

von zwei ganzzahligen Variablen $E\ (Z, N)$ zusammenfassen lassen. Unter dem „Energieinhalt" oder der „Energie" E eines Kerns verstehen wir dabei diejenige Energie, die frei wird, wenn man seine Z Protonen und N Neutronen einzeln aus dem Kernverband löst und bis ins Unendliche führt. E ist nach § 2 stets negativ. Unter der „Bindungsenergie" eines Kerns wollen wir dagegen die positive Größe $(-E)$ verstehen, um den Anklang an den begründeten Sprachgebrauch zu wahren, nach dem der tieferen Energie die größere (stärkere) Bindung entspricht. Wir suchen in den folgenden fünf Paragraphen die Funktion $E\ (Z, N)$ aus der Erfahrung soweit als möglich zu konstruieren und ihre wesentlichen Eigenschaften qualitativ theoretisch zu deuten und schließlich durch einfache Ansätze quantitativ zu erfassen. Die benutzten empirischen Daten sind in der Liste aller bekannten Kerne am Schluß des Bandes enthalten.

Die Energieinhalte der stabilen Kerne (vgl. Fig. 2) bilden eine einigermaßen glatte Funktion der gesamten Teilchenzahl $Z + N$. Es erscheint daher berechtigt, in erster Näherung von den individuellen Eigenschaften einzelner Kerne abzusehen und die wirkliche Funktion $E\ (Z, N)$ durch eine glatte Funktion von Z und N zu ersetzen. Diese Annäherung bietet den Vorteil, daß wir die Funktion anschaulich als Fläche darstellen können in einem dreidimensionalen Raum, dessen Koordinatenachsen Z, N und E bedeuten. Den Ausgangspunkt für die Konstruktion dieser Fläche bilden die Energien der stabilen Kerne. Um sie richtig einzuordnen, müssen wir die Verteilung der stabilen Kerne in der Z-N-Ebene (d. h. das Mischungsverhältnis der Protonen und Neutronen als Funktion der gesamten Teilchenzahl) betrachten. In Fig. 3 (am Ende des Bandes) sind alle bekannten stabilen und α-labilen Kerne eingetragen; die β-labilen sind der Übersichtlichkeit halber fortgelassen. Die Punkte folgen zunächst sehr genau der Geraden $Z = N$, um dann immer deutlicher zu größerem Neutronenüberschuß abzubiegen. Fig. 2 stellt also im wesentlichen einen Schnitt durch die Energiefläche längs dieser Linie dar. Die Energie nimmt hier

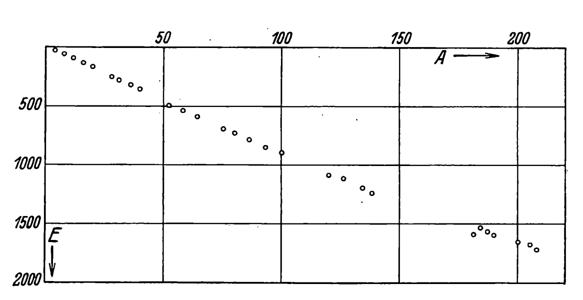


Fig. 2. Energieinhalte der stabilen Kerne in tausendstel Masseneinheiten als Funktion der Teilchenzahl.

ungefähr proportional zur gesamten Teilchenzahl ab, mit einem langsamen Flacherwerden bei den schweren Kernen; die Energiefläche ist also längs dieser Linie gleichmäßig abschüssig nach der Seite der schweren Kerne hin.

Wie sieht die Fläche nun außerhalb dieses Gebietes aus? Durch β-Zerfall kann ein Kern in einen Kern gleicher Massenzahl und tieferer Energie übergehen; die stabilen Kerne müssen also die bei gegebener Teilchenzahl tiefste mögliche Energie haben. D. h. in jedem Schnitt durch die Energiefläche längs einer der Ebenen $Z + N = \text{const}$ müssen die stabilen Kerne beim tiefsten Punkt der Energiekurve liegen. Fig. 1 zeigt einen solchen Schnitt in der Gegend der leichten Kerne; bei schwereren Kernen muß das Minimum etwas nach links rücken (Neutronenüberschuß). Ob die Energien derjenigen „Kerne", die nur aus Protonen oder nur aus Neutronen bestehen, genau gleich Null sind, wie in Fig. 1 angenommen, läßt sich natürlich aus der Erfahrung nicht ablesen; sicher scheint jedenfalls, daß die Energiefläche im großen gesehen ein offenes „Tal" darstellt, an dessen Abhängen die im allgemeinen höchstens künstlich herstellbaren β-aktiven Kerne ihren Platz haben, während in der „Talsohle" der „Bach" der stabilen Elemente fließt. Die Höhenlinienkarte dieser Landschaft ist in Fig. 4 skizziert.

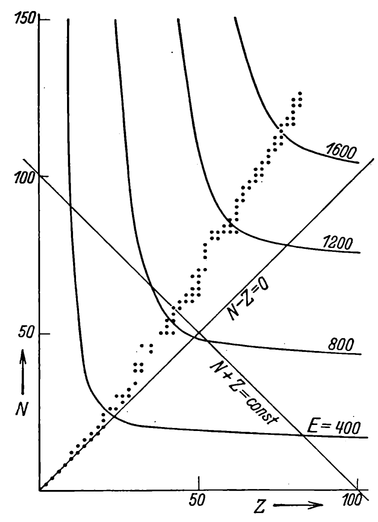


Fig. 4. Lage der stabilen Isotope und Kurven konstanter Energie (gemessen in $^1/_{1000}$ M.E.).

Die Kenntnis dieses Verlaufs der Energiefläche genügt zur qualitativen Erklärung des α-Zerfalls (W. Heisenberg, 51). Zunächst ist es nach Fig. 4 verständlich, daß kein Kern spontan Protonen oder Neutronen emittiert. Keine Erfahrungstatsache spricht dagegen, die Höhenlinien so zu zeichnen, daß man bei der Hinzufügung eines Protons oder Neutrons zu jedem beliebigen Kern stets Energie gewinnt, wie man es erwarten müßte, wenn die Anziehung zwischen Protonen und Neutronen die einzige Kernkraft wäre; und jedenfalls wird dies für die stabilen Kerne, in deren Gegend die Höhenlinien umbiegen, gelten. Damit hingegen der α-Zerfall energetisch möglich wird, ist es nicht notwendig, daß die Energie des Restkerns tiefer liegt als die des Anfangskerns, sondern nur daß die Energie des gesamten Restgebildes, d. h. die Summe der Energien von Restkern und

α-Teilchen dieser Bedingung genügt. D. h. der α-Zerfall tritt ein, wenn

$$E\,(Z, N) > E(Z - 2,\ N - 2) + E\,(2{,}2); \tag{8.1}$$

also wenn man bei der Zufügung von zwei Protonen und zwei Neutronen zum Kern $(Z - 2, N - 2)$ weniger Energie gewinnt als bei ihrer Zusammenfügung zu einem freien α-Teilchen; oder, im Bild der Energiefläche, wenn die Neigung der Fläche in der Richtung $Z - N =$ const an der fraglichen Stelle geringer ist als die Neigung der Geraden von (0,0) nach (2,2). Wenn E als differenzierbare Funktion von Z und N angesehen werden darf, kann man für (8.1) schreiben

$$2\left(\frac{\partial E}{\partial Z} + \frac{\partial E}{\partial N}\right) > E\,(2{,}2). \tag{8.2}$$

Die Abnahme der Neigung der Energiefläche in der Gegend der schwersten Kerne (Fig. 2) macht es verständlich, daß gerade dort der α-Zerfall einsetzt und die Existenz noch schwererer Kerne verhindert. Eine Schwierigkeit scheint aber der Umstand zu bieten, daß schon etwa von $_{50}$Sn ab eine Krümmung der Energiefläche nach oben merkbar wird (vgl. die „Bindungsenergien pro Teilchen", Fig. 10); man versteht nicht ohne weiteres, warum nicht alle Kerne oberhalb $Z = 50$ α-labil sind. Dazu ist aber erstens zu beachten (G. GAMOW, 41), daß Fig. 2 nicht die Neigung in der Richtung $Z - N =$ const angibt, in der sich der Kern im Diagramm Fig. 3 beim α-Zerfall bewegt. D. h. der Übergang von einem schweren Kern zu dem um vier Einheiten leichteren gegen β-Zerfall stabilen Kern geschieht sehr häufig nicht durch einen bloßen α-Zerfall, sondern etwa durch einen α-Zerfall und zwei nachfolgende β-Zerfälle, so wie wir es auch aus den radioaktiven Reihen kennen. Nun wird es oft vorkommen, daß der β-labile Zwischenkern, der durch den α-Zerfall zunächst gebildet werden müßte, bereits so weit außerhalb der Talsohle liegt, daß seine Energie höher ist als die des Ausgangskerns. Dann ist der Ausgangskern zwar im Prinzip instabil, er kann aber die Teilchen, die emittiert werden sollen, nicht sukzessive, sondern nur auf einmal loswerden, und dieser Vorgang hat, wie alle Mehrfachprozesse, eine so geringe Wahrscheinlichkeit, daß der Kern praktisch stabil bleibt. Man muß demnach erwarten, daß auch in einem Gebiet, in dem sich hauptsächlich α-labile Kerne befinden, noch isoliert liegende stabile Kerne vorkommen. Dazu kommt weiterhin, daß die Zerfallswahrscheinlichkeit nach der GAMOWschen Theorie des α-Zerfalls (§ 19) exponentiell mit der Zerfallsenergie abnimmt und daher Kerne, die α-Strahlen von wesentlich geringerer Energie als etwa Uran emittieren, keine merkliche Radioaktivität mehr zeigen werden.

§ 9. Periodizitäten im Verlauf der Bindungsenergien

Zur Erklärung der Gesetzmäßigkeiten der β-Labilität genügt das Modell der glatten Energiefläche nicht. Denn in diesem Modell gibt es zu jeder vorgegebenen Massenzahl nur einen stabilen Kern, nämlich denjenigen, der dem Minimum der Energiekurve für diese Masse am nächsten liegt. Seine sämtlichen Nachbarn sollten β-aktiv sein. Allerdings könnte gelegentlich die Energiedifferenz zweier Kerne, die auf verschiedenen Seiten des Minimums liegen, kleiner sein als die Ruhenergie des zu emittierenden Elektrons oder Positrons, die ja mindestens freigemacht werden muß; aber diese Spanne ist zu gering, um das häufige Vorkommen von Isobaren zu erklären, deren Protonen- und Neutronenanzahlen sich zudem fast stets um zwei unterscheiden, während der zwischen beiden liegende Kern unbekannt oder als β-aktiv beobachtet ist. Diese Tatsache wird nur verständlich, wenn man die energetische Auszeichnung der geraden Teilchenzahlen beachtet, die sich in den folgenden Tatsachen äußert:

1. Kerne mit gerader Protonen- und Neutronenzahl sind häufiger als Kerne mit einer oder zwei ungeraden Teilchenzahlen (HARKINS, 48, vgl. § 35). Stabile Kerne mit gleichzeitig ungerader Protonen- und Neutronenzahl kommen überhaupt nur viermal, und zwar bei den leichtesten Elementen vor ($^{2}_{1}D$, $^{6}_{3}Li$, $^{10}_{5}B$, $^{14}_{7}N$); schwerere Kerne dieses Typus sind stets β-aktiv.
2. Es gibt (mit vielleicht einer oder zwei Ausnahmen) keine stabilen Isobare ungerader Masse und keine stabilen Isobare gerader Masse, deren Ordnungszahlen sich um eine ungerade Zahl unterscheiden (MATTAUCH, 69).
3. Elemente mit ungerader Ordnungszahl haben nie mehr als zwei stabile Isotope; Elemente mit gerader Ordnungszahl pflegen zahlreiche Isotope zu haben, deren schwerstes und leichtestes fast stets gerade Neutronenzahl hat (ASTON, 5). Umgekehrt gibt es nie mehr als zwei Kerne mit gleicher, ungerader Neutronenzahl; und der schwerste und leichteste Kern von einer gegebenen geraden Neutronenzahl pflegt gerade Protonenzahl zu haben (vgl. Fig. 3).

Aus diesen Regeln geht unmittelbar hervor, daß die Kerne mit geraden Teilchenzahlen im Durchschnitt stabiler sind als ihre Nachbarn mit ungeraden Anzahlen. Wir werden zeigen, daß sich die Regeln deuten lassen mit Hilfe der einfachsten möglichen Erweiterung unserer bisherigen Annahmen: Die Energien der Kerne sind nicht durch eine glatte Funktion

$E\,(Z, N)$ gegeben, sondern durch drei nur wenig voneinander verschiedene Funktionen E_{gg}, E_{ug}, E_{uu}, die resp. für Kerne mit zwei geraden, mit einer ungeraden und einer geraden, und mit zwei ungeraden Teilchenzahlen gelten (W. HEISENBERG, 50). Die Energiefläche ist also gleichsam dreistöckig. Die mittlere Fläche noch aufzuspalten, je nachdem ob Z oder N ungerade ist, erweist sich als unnötig.

Nach dieser Annahme gilt der in Fig. 1 angegebene einfache Verlauf der Energien von Kernen gleicher Massenzahl nur, wenn diese Zahl ungerade ist; denn dann ist stets die eine der beiden Teilchenzahlen gerade, die andere ungerade. Für gerade Gesamtmasse hat man dagegen zwei Energiekurven zu zeichnen (Fig. 5), die eine für die Kerne vom Typ gg, die andere für den Typ uu. Man erkennt sofort, daß nun mehrere „geradzahlige“ Kerne stabiler sind als ihre unmittelbaren Nachbarn. Der Zerfall in den Übernachbarn, der wieder geradzahlig ist, bleibt zwar möglich, ist aber als Doppelprozeß äußerst unwahrscheinlich. Dadurch wird die Instabilität der Kerne mit zwei ungeraden Teilchenzahlen und die Regel 2 unmittelbar verständlich; ferner das zahlenmäßige Überwiegen der Kerne mit zwei geraden Teilchenzahlen, da nach Regel 2 nur bei gerader Gesamtmasse Isobare vorkommen können und außerdem jeder stabile Kern von gerader Massenzahl vom Typ gg sein muß, während die Kerne von ungerader Massenzahl sich auf die beiden Typen mit ungeradem N und ungeradem Z verteilen. Daß die Kerne mit zwei geraden Anzahlen nicht nur in der Menge der Kernsorten, sondern auch in der Menge der Individuen (also in der geochemischen Häufigkeit) an der Spitze stehen, läßt sich natürlich nicht ohne eine (vermutlich nur in Verbindung mit der Astrophysik mögliche) Theorie der Entstehung der Elemente erklären (s. § 36); immerhin ist es plausibel, daß die stabileren Elemente auch in größerer Anzahl gebildet und in geringerer Anzahl in andere Elemente weiterverwandelt wurden. Daß die stabilen Kerne mit zwei ungeraden Teilchenzahlen bei den leichtesten Elementen liegen, ist verständlich. Denn z. B. $^{2}_{1}$D könnte nur in einen Kern aus zwei Protonen oder zwei Neutronen übergehen, die beide zweifellos eine sehr viel geringere Bindungsenergie haben, wenn sie überhaupt existenzfähig sind. Entsprechend würde wohl

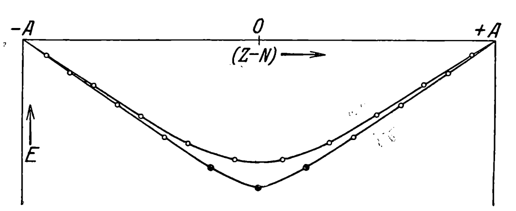


Fig. 5. Bindungsenergien bei gerader Gesamtteilchenzahl.

auch noch für Li, B und N die Änderung des Mischungsverhältnisses der Protonen und Neutronen beim β-Zerfall (die ja bei kleinen Z und N prozentual am größten ist) die Bindungsenergie mehr herabdrücken als der Übergang zum geradzahligen Kern sie vermehrt.

Auch die Regel 3 läßt sich aus der Annahme über die Struktur der Energiefläche verstehen. Aus 1. ergibt sich, daß die Isotope von Elementen mit ungerader Ordnungszahl (oberhalb $^{14}_{7}\mathrm{N}$) stets gerade Neutronenzahlen haben und demnach nie Nachbarn in der Massenzahl sein können. Nun wird es öfters vorkommen (vgl. Fig. 6), daß sich die Talsohle der Energiefläche so zwischen zwei derartigen Kernen (z. B. $^{35+44}_{35}\mathrm{Br}$ und $^{35+46}_{35}\mathrm{Br}$) hindurchzieht, daß beide stabiler sind als die Isobare, in die sie zerfallen könnten ($^{34+45}_{34}\mathrm{Se}$ und $^{36+45}_{36}\mathrm{Kr}$); sie liegen dann also auf entgegengesetzten Abhängen des Tals. Dagegen muß ein drittes Isotop (z. B. $^{35+48}_{35}\mathrm{Br}$) bereits so weit ab vom Energieminimum liegen, daß wenigstens eines seiner Isobare ($^{36+47}_{36}\mathrm{Kr}$) stabiler ist. Daß ferner bei gerader Ordnungszahl zu jedem stabilen Kern mit ungerader Neutronenzahl auch noch ein schwererer und ein leichterer Kern mit gerader Neutronenzahl stabil ist, läßt sich zwar nicht allgemein beweisen, ist aber bei hinreichend großem gegenseitigen Abstand der drei „Stockwerke“ der Energiefläche in den meisten Fällen zu erwarten.

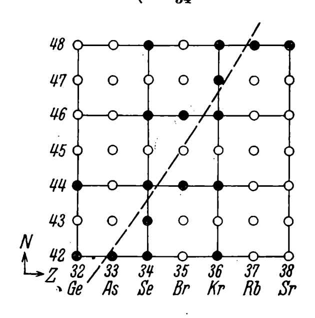


Fig. 6. Beispiel für den Verlauf der „Talsohle“ zur Erklärung der ASTONschen Regel.

Dieselben Überlegungen gelten mutatis mutandis für „Isotone“ (Kerne gleicher Neutronenzahl; Bezeichnung von GUGGENHEIMER, s. 28). Da die Kurve des Energieminimums im Mittel stets steiler als die Gerade $Z - N = \mathrm{const}$ (d. h. in Fig. 3 und 6 steiler als unter 45°) nach oben strebt, sollte sogar die schärfere Regel gelten, daß es zu jeder ungeraden Neutronenzahl höchstens e i n e n stabilen Kern geben kann; Ausnahmen wie $^{50+71}_{50}\mathrm{Sn}$ und $^{52+71}_{52}\mathrm{Te}$ lassen sich nur durch die periodischen Schwankungen der Energiefläche um den bisher besprochenen mittleren Verlauf erklären, die wir im folgenden kurz betrachten.

Die Periodizität mit der Zahl Zwei ist weitaus die hervorstechendste Abweichung der Energiefunktion vom glatten Verlauf. Es sind aber noch weitere Abweichungen merklich, die etwa als „Windungen“ des Energietals bezeichnet werden können. Die Kette der stabilen Elemente in Fig. 3 folgt nicht einer glatten Kurve, vielmehr scheinen gewisse waagerechte

und senkrechte Reihen, d. h. gewisse Werte von N und Z ausgezeichnet zu sein, so vor allem $N = 50$, $N = 82$ und vielleicht $Z = 50$ (GUGGENHEIMER, W. ELSASSER, 28). Besonders auffallend ist die Stabilität des Kerns $^{144}_{62}\mathrm{Sm}$, der 82 Neutronen enthält und als einziger bekannter stabiler Kern um drei Einheiten in N von seinem nächsten stabilen Isotop ($^{147}_{62}\mathrm{Sm}$) entfernt ist. Natürlich könnte diese Auszeichnung bestimmter Zahlwerte von N und Z durch die Entdeckung einiger bisher unbekannter seltener Isotope wieder an Deutlichkeit verlieren. Daß aber in der Gegend dieser Zahlwerte jedenfalls eine objektive Windung der Energiefläche vorliegt, erkennt man, wenn man nach GAMOW (43) den Verlauf der Talsohle aus der Lage der stabilen Isobare konstruiert. Wenn nämlich bei gegebener Massenzahl mehrere Isobare vorhanden sind, so muß das Energieminimum jedenfalls zwischen ihnen liegen; ist dagegen nur ein stabiler Kern vorhanden, so muß das Minimum zwischen seinen beiden (instabilen) Nachbarisobaren liegen. Durch die so definierte „Rinne", die das Energieminimum umschließt, läßt sich nun aber keine glatte Kurve legen. (Vgl. Fig. 10. Dort ist, um das Diagramm auf einen engen Raum zusammenzupressen, als Ordinate N/Z und als Abszisse, um keine der beiden Teilchenzahlen willkürlich auszuzeichnen, $N + Z$ gewählt; diese Koordinatentransformation darf den glatten Verlauf der Kurve nicht ändern.) Man erkennt deutlich die Windungen, die den ausgezeichneten Zahlen $N = 50$ und $N = 82$ entsprechen, während $Z = 50$ allerdings kaum hervortritt.

Am genauesten läßt sich eine Windung der Energiefläche im Gebiet der natürlichen Radioaktiven feststellen, in dem uns zwar ebensowenig wie bei den stabilen Kernen die Bindungsenergien selbst mit hinreichender Genauigkeit, wohl aber ihre Änderungen mit Z und N gegeben sind. In Fig. 7 sind (nach W. HEISENBERG, 52) alle bekannten α-Zerfallsenergien aufgetragen, d. h. die Größen

$$\varDelta E = -2\left(\frac{\partial E}{\partial Z} + \frac{\partial E}{\partial N}\right) + E(2,2). \tag{9.1}$$

Die Neigung der Energiefläche in der Richtung $Z - N = \mathrm{const}$ ist um so geringer, je größer $\varDelta E$ ist. Bei glattem Verlauf der Energiefläche würde man erwarten, daß die den stabilen Kernen am meisten benachbarten α-Strahler, wie die C'-Produkte, die geringste Zerfallsenergie hätten und die schwersten bekannten Kerne, wie Th und U, die größte. Tatsächlich sind die Verhältnisse genau umgekehrt. Das ganze Phänomen der radioaktiven Reihen beruht sogar darauf, daß an ihrem Anfang Elemente stehen, die so geringe Zerfallsenergien und daher (nach der GEIGER-NUTTALschen Beziehung, vgl. § 19) so lange Lebensdauer haben, daß in den

$1^1/_2$ Milliarden Jahren seit dem Erstarren der Erdkruste noch merkliche Mengen von ihnen übriggeblieben sind, und daß andererseits ihre Folgeprodukte höhere Zerfallsenergien und daher kürzere Lebensdauer haben, so daß der einmal eingeleitete Zerfallsprozeß mit wachsender Geschwindigkeit weiterläuft. Fig. 7 zeigt deutlich, daß es sich dabei nicht um eine gleichsam zufällige Streuung der Werte der Zerfallsenergien handelt, sondern um einen gesetzmäßigen Zusammenhang, dem sich alle drei radioaktiven Reihen einfügen. Man erkennt ferner, daß dieses Anwachsen außerordentlich plötzlich bei Blei abreißt; ELSASSER (28) hat darauf aufmerksam gemacht, daß die Grenze für alle drei Reihen bei $Z = 82$ und $N = 126$ liegt, was wieder als Hinweis auf ausgezeichnete Teilchenzahlen gedeutet werden könnte. Es sei im übrigen betont, daß ΔE nach (9.1)

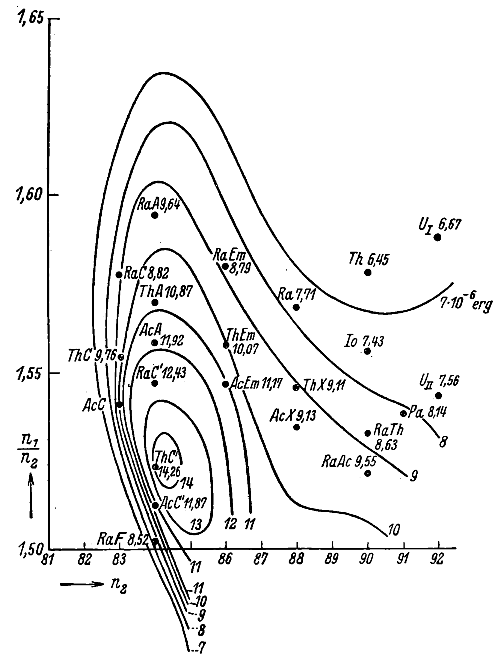


Fig. 7. Zerfallsenergien der α-Strahler (nach W. HEISENBERG [52]). Abszisse $n_2 = Z$, Ordinate $n_1/n_2 = N/Z$.

eine relativ kleine Differenz größerer Beträge ist [der größte Wert von ΔE ist der von $\mathrm{ThC'} = 9 \cdot 10^6$V, dagegen $E\,(2,2) = 32 \cdot 10^6$V] und daher das schroffe „Gebirge" der Fig. 7 in der Energiefläche selbst nur eine ziemlich geringfügige Änderung der Neigung bedeutet.

§ 10. Das Tröpfchenmodell

Wir suchen nun ein theoretisches Bild vom Kernbau zu entwickeln, das die in den letzten beiden Paragraphen zusammengestellten empirischen Gesetzmäßigkeiten durch atommechanisch definierbare Begriffe ausdrückt. Die Grundzüge dieses Bildes hat GAMOW (41) noch vor der Entdeckung des Neutrons in seinem „Tröpfchenmodell" angegeben, das wir mit geringen Änderungen der Ausdrucksweise und einer Erweiterung übernehmen können.

Die genäherte Proportionalität der Bindungsenergie und des Kernvolumens mit der Teilchenzahl legt den Vergleich des Kerns mit einem Flüssigkeitströpfchen nahe. Wir nehmen daher an, daß man die Protonen und Neutronen im Kern in gewisser Näherung wie eine homogene Flüssigkeit behandeln kann. Ihre Bindungsenergie pro Teilchen und Volumeneinheit, die von der gesamten Teilchenzahl ungefähr unabhängig ist, wird

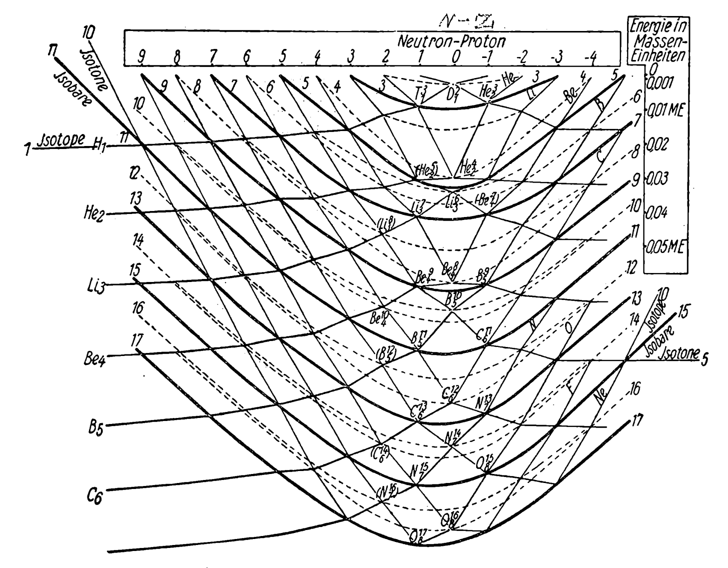


Fig. 8. Bindungsenergien der leichten Kerne. Abszisse $(N-Z)$.

natürlich noch stark vom Mischungsverhältnis der beiden die Kernmaterie konstituierenden Teilchensorten abhängen. Dem entspricht es, daß man in Fig. 4 beim Fortschreiten auf einer beliebigen durch den Nullpunkt gehenden Geraden eine näherungsweise lineare Energieabnahme finden wird, aber eine für verschiedene Geraden sehr verschiedene Steilheit des Abfalls; an der Stelle des steilsten Abfalls (des günstigsten Mischungsverhältnisses) liegen die stabilen Elemente.

Diese einfache Modellvorstellung, verbunden mit den empirisch gut bekannten Massendefekten der leichtesten Kerne, gibt uns die Möglichkeit, den Anfang der Energiefläche mit einiger Genauigkeit wirklich zu konstruieren. Das Ergebnis dieses Versuchs zeigt Fig. 8, die von H. Euler (vgl. 93) stammt. Sie stellt die Projektion des Anfangs der Energiefläche auf eine Ebene $Z + N =$ const dar. Man könnte sie aus einem räumlichen

Modell der Energiefläche herstellen, wenn man die Schnitte der Fläche mit den sämtlichen Ebenen $Z + N = 1, 2, 3 \ldots$, die jeweils die Form der Kurven von Fig. 1 bzw. 5 haben, auf einem Blatt Papier übereinanderklebte. Man erkennt deutlich die abwechselnd einfachen und aufgespaltenen Isobarenkurven; außerdem sind Isotopen- und Isotonenkurven eingezeichnet, d. h. Kurven, welche die Kerne mit gleichen Protonen- bzw. Neutronenzahlen verbinden und im räumlichen Bild gleichsam die schräg nach hinten laufenden Fäden darstellen, auf denen die Querschnitte der Isobarenkurven aufgehängt sind. Natürlich ist nur der mittlere Streifen der Figur, in dem die stabilen Kerne liegen, direkt aus der Erfahrung entnommen; der Rest ist auf Grund der folgenden Annahmen extrapoliert: Die Bindungsenergie eines nur aus Neutronen (oder nur aus Protonen) bestehenden Kerns wird gleich Null gesetzt; d. h. es wird angenommen, daß zwischen gleichartigen Teilchen keine beträchtliche Wechselwirkung bestehe. Da das Flüssigkeitsmodell zu der Annahme zwingt, daß die Kräfte Absättigungscharakter haben, wird die Bindungsenergie, die durch die Hinzufügung einer kleinen Zahl von Protonen zu einem solchen Gebilde gewonnen wird, von der Gesamtzahl der überschüssigen freien (d. h. wegen der Absättigung am Bindungsprozeß nicht beteiligten) Neutronen nicht wesentlich abhängen: die Bindungsenergie muß bei extremen Mischungsverhältnissen unabhängig von der Anzahl der häufigeren und proportional zur Anzahl der selteneren Teilchen sein. Es folgt bei Hinzufügung weiterer Protonen ein Zwischengebiet, in dem keine Interpolation möglich wäre; hier liegen die bekannten Kerne, deren gemessene Massendefekte das Skelett der ganzen Figur darstellen. Schließlich muß für großes Übergewicht der Protonen die Bindungsenergie nur noch von der Neutronenzahl abhängen; d. h. die Isotopenkurve läuft waagerecht aus. Dieselben Überlegungen gelten für die Konstruktion der Isotonenkurven.

Die Figur deutet schon die notwendigen Erweiterungen des Tröpfchenmodells an. Man erkennt in den untersten Kurven ein leichtes Abweichen des Energieminimums von der Ordinatenachse nach links, den Anfang des Übergewichts der Neutronen bei schwereren Kernen. Gamow hat diesen Effekt folgendermaßen durch die elektrostatische Abstoßung der Protonen gedeutet: Das flüssigkeitsähnliche Verhalten der Kernmaterie ist nur verständlich, wenn die für die Bindung verantwortlichen Kräfte zwischen den Teilchen im Kern eine so geringe Reichweite haben, daß jedes Teilchen im wesentlichen nur mit seinen Nachbarn wechselwirkt; denn nur dann kann der Energiezuwachs, der bei der Anlagerung eines neuen Teilchens an irgendeiner Stelle der Oberfläche eintritt, unabhängig

sein von der Anzahl der im ganzen Tröpfchen schon vorhandenen Teilchen. Dagegen genügt die Coulombsche Abstoßung der Protonen dieser Bedingung nicht, da bekanntlich das Integral über die Coulombsche Wechselwirkungsenergie eines sehr großen, mit gleichmäßiger Elektrizitätsdichte erfüllten Gebiets mit einem einzelnen geladenen Teilchen bereits divergiert. D. h. während die „Volumenenergie“ der Kernflüssigkeit proportional zur Teilchenzahl und im übrigen nur eine Funktion des Mischungsverhältnisses ist:

$$E_V = -f\left(\frac{N}{Z}\right) \cdot (Z+N), \tag{10.1}$$

liefert zur Coulombschen Abstoßungsenergie die Wechselwirkung jedes Protons mit jedem anderen einen wesentlichen Beitrag: sie ist proportional zum Quadrat der Protonenzahl, dividiert durch den mittleren Abstand zweier Protonen im Kern. Dieser mittlere Abstand ist seinerseits zum Kernradius proportional und wächst daher wie die dritte Wurzel aus der Gesamtteilchenzahl. Setzt man im ganzen die Coulombsche Energie des Kerns gleich der Energie einer Kugel von der Größe des Kerns, in der die Ladung Ze homogen verteilt ist, so ergibt sich

$$E_C = \frac{3}{5}\frac{Z^2 e^2}{r} = \frac{3}{5}\frac{Z^2 e^2}{r_0 (Z+N)^{1/3}} \sim \mathrm{const}\, Z^{5/3}. \tag{10.2}$$

Mit wachsender Teilchenzahl macht sich dieses Glied immer mehr bemerkbar, und der Kern bleibt nur stabil, wenn er einen Neutronenüberschuß aufnimmt, obwohl dadurch das Verhältnis N/Z sich von seinem günstigsten Wert entfernt. Schließlich genügt auch dieser Ausgleich nicht mehr und die α-Labilität tritt ein: es wird energetisch vorteilhaft, Ladungen aus dem Kern zu entfernen.

Die Notwendigkeit einer zweiten Erweiterung des Modells zeigt am deutlichsten Fig. 9. Wenn nur die Volumenkraft vorhanden wäre, so müßten die dort aufgetragenen Packungsanteile (Energieinhalte pro Teilchen) von der Massenzahl unabhängig sein. Die Coulombenergie kann für den sanften Anstieg am rechten Ende der Kurve verantwortlich gemacht werden. Der Anstieg nach der Seite der leichten Kerne bedeutet dagegen, daß das Tröpfchenmodell auch für zu geringe Teilchenzahlen ungenau wird. Das ist natürlich; z. B. wird man nicht erwarten, daß die vier Teilchen im Heliumkern noch mit guter Näherung als homogene Flüssigkeit angesehen werden können. Man darf nach Analogie der makroskopischen Flüssigkeiten vermuten, daß die ersten Abweichungen durch die Einführung einer Oberflächenspannung der Kernflüssigkeit korrekt beschrieben werden (G. C. Wick, 97, sowie 94). D. h. wir nehmen an,

daß zur Volumenenergie ein zur Kernoberfläche proportionaler positiver Energiebetrag hinzukommt:

$$E_0 = g\left(\frac{N}{Z}\right) \cdot (Z + N)^{2/3}. \tag{10.3}$$

Dieser Beitrag rührt nicht von einer neuen Kraft her, sondern davon, daß in einer Oberflächenschicht, die bei leichten Kernen mit dem gesamten Kernvolumen vergleichbar wird, eine andere Dichte und eine andere Energieverteilung besteht als in Volumenelementen, die allseitig von Kernflüssigkeit umgeben sind (vgl. dazu § 17).

§ 11. Verfeinerte Modelle

Die bisher entwickelten Vorstellungen sind geeignet, den Verlauf der Energiefläche darzustellen, soweit von den Periodizitäten und Windungen abgesehen wird. Um diese zu verstehen, ist es notwendig, über die Vorstellung einer homogenen Flüssigkeit hinauszugehen. Hierfür bietet die Analogie zu bereits theoretisch untersuchten ausgedehnteren Systemen im wesentlichen zwei verschiedene Ansatzpunkte. Man kann entweder die Flüssigkeitsvorstellung verfeinern und etwa eine räumliche Zusammenordnung der Protonen und Neutronen zu größeren Komplexen, „Molekülen" der Kernflüssigkeit, annehmen, oder aber auf das Tröpfchenmodell als erste Näherung vollständig verzichten und den Kern in Nachbildung des Bohrschen Modells der Atomhülle als ein Zentralsystem auffassen, dessen Untergliederung in der Form „abgeschlossener Schalen" von Protonen und Neutronen vorliegt. Da sich keine dieser Vorstellungen so unmittelbar aus dem empirischen Material ergibt wie das Tröpfchenmodell, erscheint es notwendig, bei ihrer Besprechung gelegentlich den Rahmen der rein phänomenologischen Darstellung zu verlassen und ihre theoretische Zulässigkeit mit quantenmechanischen Überlegungen zu prüfen. Wir zählen zunächst die verschiedenen Möglichkeiten auf und vergleichen ihre Konsequenzen dann mit den in § 9 genannten empirischen Gesetzmäßigkeiten.

Als Molekül der Kernflüssigkeit kommt vor allem die stabilste Verbindung einer möglichst kleinen Zahl von Protonen und Neutronen, das α-Teilchen, in Betracht. Die Annahme, daß α-Teilchen als fertige Gebilde im Kern vorhanden seien, könnte sogar als eine direkte Konsequenz der Erfahrung erscheinen, da ja beim radioaktiven Zerfall und bei Zertrümmerungen fertige α-Teilchen den Kern verlassen. So hat Gamow das Tröpfchenmodell zunächst für eine Flüssigkeit von α-Teilchen aufgestellt.

Der genannte Schluß aus der Erfahrung ist jedoch zwar einleuchtend, aber nicht zwingend. Z. B. sind ja auch häufig in makroskopischen Flüssigkeiten (etwa in starken Elektrolyten) Substanzen in Ionen oder Atome dissoziiert, die man in Gasform nur als Moleküle kennt. Daß ohne äußere Energiezufuhr zwei Protonen und zwei Neutronen den Kern, wenn überhaupt, dann nur in Form eines α-Teilchens verlassen können, das folgt bereits aus rein energetischen Betrachtungen (§ 8); auch wenn sich die vier Teilchen im allgemeinen unabhängig voneinander im Kern bewegen, werden sie sich also nur in solchen Augenblicken aus dem Kernverband lösen können, in denen sie gerade in einer Konstellation sind, die sie befähigt, zu einem α-Teilchen zusammenzutreten. — Außer den α-Teilchen sind als Kernmoleküle bisher nur Tritonen, Deuteronen und „Bineutronen“ (Neutronenpaare) vorgeschlagen worden, um die Teilchen ganz oder teilweise unterzubringen, die in den α-Teilchen keinen Platz mehr finden (das sind bei gerader Ordnungszahl $N-Z$ Neutronen, bei ungerader Ordnungszahl ein Proton und $N-Z-1$ Neutronen). Da diese Gebilde aber zweifellos einen wesentlich geringeren Massendefekt pro Teilchen haben als das α-Teilchen, erscheint es unplausibel, daß sie unter den großen, im Kern wirksamen Kräften stabil bleiben sollten.

Während die in einem α-Teilchen gebundenen Protonen und Neutronen sich nie weit voneinander entfernen können, liegt den Schalenmodellen im engeren Sinne die Annahme zugrunde, daß man jedem Teilchen unabhängig von der augenblicklichen Lage der anderen eine bestimmte, feste Bahn um den Schwerpunkt des Kerns zuschreiben könne, die durch gewisse Quantenzahlen charakterisiert sei. Aus dieser Annahme folgt ein Schalenaufbau außerdem nur für Teilchen mit Fermi-Statistik, die dem Verbot der Doppeltbesetzung äquivalenter Bahnen unterliegen; daher können nur die Protonen oder Neutronen selbst in Schalen angeordnet sein und dadurch gewisse Periodizitäten im Kernbau bewirken, während ein „Schalenaufbau“ aus fertigen α-Teilchen die triviale Form hätte, daß alle Teilchen im Grundzustand wären. α-Teilchenmodell und Schalenmodell (Elsasser, 28) schließen einander also, wörtlich verstanden, aus. Eine Kombination beider Modelle hat Landé (67) vorgeschlagen; er nimmt an, daß zwar die größte mögliche Zahl von α-Teilchen im Kern vorhanden ist, daß aber die überschüssigen Neutronen in Schalen angeordnet sind.

Beide Modelle haben prinzipielle Grenzen der Anwendbarkeit. Wenn man das Tröpfchenmodell wörtlich nehmen dürfte, so müßte man nach dem Ort der einzelnen α-Teilchen im Kern fragen können. Die Höhe der

Anregungsenergien der Kerne, deren direktester Beweis die thermische und chemische Unbeeinflußbarkeit der Kernprozesse ist, zwingt zu dem Schluß, daß die normale Kernmaterie stets im Grundzustand ist, d. h. wie eine Flüssigkeit beim absoluten Nullpunkt behandelt werden darf; nach der Analogie zu makroskopischen Substanzen müßte man danach eine gitterförmige Anordnung der α-Teilchen, ein Kristallmodell des Kerns erwarten. In Wirklichkeit zeigt Einsetzen der Masse und mittleren Bindungsenergie eines α-Teilchens im Kern ($\sim 30 \cdot 10^{-3}$ M.E.) in die Formel (5.8) des § 5, daß die Amplitude der Nullpunktsschwingung eines α-Teilchens im Kern von der Größenordnung des Kerndurchmessers selbst ist und es daher wohl kaum mehr einen physikalischen Sinn hat, einem α-Teilchen einen definierten Ort im Kern zuzuschreiben und etwa nach Wirkungen einer regelmäßigen räumlichen Anordnung zu suchen.

Das Schalenmodell ist von dieser Gültigkeitsbeschränkung frei, da ja die Wellenfunktion eines in einer abgeschlossenen Schale gebundenen Teilchens über den gesamten von dieser Schale eingenommenen Raum (d. h. im allgemeinen über das ganze Kerninnere) ausgedehnt ist. Seine Schwäche liegt aber darin, daß den einzelnen Teilchen nur dann individuelle Quantenzahlen zugeschrieben werden können, wenn sie sich in einem festen äußeren Kraftfeld bewegen, das durch die Bewegung der Teilchen selbst nicht wesentlich beeinflußt wird. Diese Bedingung ist in der Atomhülle, die durch das vorgegebene Kernfeld zusammengehalten wird, relativ gut erfüllt. Im Kern dagegen schaffen die Protonen und Neutronen selbst erst das Feld, das ihre Schalenanordnung bestimmen soll. Selbst wenn es erlaubt sein sollte, in einem einzelnen Kern die Wirkung aller Teilchen auf ein willkürlich herausgegriffenes jeweils durch ein einfaches Zentralfeld zu ersetzen (vgl. dazu § 18), so wird dieses Feld sich doch durch die Hinzufügung weiterer Teilchen zum Kern wieder ändern, und man kann daher nicht erwarten, daß sich die Schalen, durch die man den Bau der leichten Kerne beschreiben kann, auch bei den schwereren Kernen wiederfinden; ein Analogon zu den Gesetzmäßigkeiten der Röntgenspektren und des periodischen Systems ist kaum zu erwarten. Das Schalenphänomen wird sich daher, wenn überhaupt, wohl nur in der energetischen Auszeichnung gewisser Teilchenzahlen zeigen, ohne daß die Abfolge dieser Zahlen eine erkennbare Periodizität aufweisen müßte. —

Die erste empirische Anforderung an jedes verfeinerte Kernmodell ist, daß es die Auszeichnung der geraden Teilchenzahlen erklären muß. Das α-Teilchenmodell würde zwanglos die Auszeichnung gerader Protonenzahlen erklären. Um verständlich zu machen, daß auch die überschüssigen

Neutronen die geraden Anzahlen bevorzugen, wären aber Zusatzannahmen über Neutronenschalen oder über die Bildung von Bineutronen notwendig, und es bliebe auf jeden Fall schwer verständlich, daß bei Kernen mit ungerader Massenzahl die gerade Protonenzahl vor der geraden Neutronenzahl nicht energetisch ausgezeichnet zu sein scheint.

Im Schalenmodell muß die Auszeichnung der geraden Anzahlen bedeuten, daß stets nach der Hinzufügung zweier gleichartiger Teilchen eine Schale abgeschlossen ist. Nimmt man dazu die Tatsache, daß alle Kerne mit zwei geraden Teilchenzahlen den Drehimpuls Null haben (§ 13), so muß man annehmen, daß es in den Kernen — im Gegensatz zur Atomhülle — keine entarteten Zustände gibt, d. h. keine Zustände, die bei gleicher Energie verschiedene Quantenzahlen haben und daher nach dem Pauliprinzip mehrfach besetzt werden dürfen; die einzige Entartung scheint die Spinentartung zu sein, d. h. die energetische Gleichwertigkeit der beiden zu jeder räumlichen Eigenfunktion noch möglichen Zustände, die sich nur durch die Spinrichtung unterscheiden. Man wird demnach annehmen, daß beim (gedachten) Aufbau einer Isotopen- oder Isotonenreihe stets bei der Hinzufügung zweier aufeinanderfolgender Teilchen jeweils derselbe Energiebetrag gewonnen wird, dann bei der Hinzufügung des dritten und vierten Teilchens jeweils ein anderer, geringerer usw. D. h. die Isotopen- und Isotonenkurven von Fig. 8 müßten aus aneinandergesetzten geradlinigen Stücken bestehen, welche die Elemente mit geraden Teilchenzahlen verbinden. Dieser Unterschied gegen die Atomhülle erscheint theoretisch plausibel. Entartungen sind die Folge von Symmetrieeigenschaften der die Teilchen bindenden Kräfte; daher zeigen die Atome, in denen die Bindung der Elektronen durch das zentralsymmetrische Coulombfeld des Kerns verursacht wird, die bekannten Zweier-, Sechser-, Zehner- usw. Schalen, während z. B. die mehratomigen Moleküle, deren Potentialverlauf infolge der Überlagerung mehrerer Coulombfelder unsymmetrisch ist, ebenso wie nach unserer Vermutung die Kerne nur Zweierschalen haben. Gerade die oben besprochenen Gültigkeitsschranken des Schalenmodells, die die Annäherung des Feldes der Kraft auf ein Teilchen im Kern durch ein Zentralfeld als mangelhaft erscheinen lassen, werden daher das Auftreten von Zweierschalen begünstigen.

Zur quantitativen Darstellung der Massendefekte ist es notwendig anzunehmen, daß sogar jeweils bei der Anlagerung des zweiten Teilchens ein größerer Energiebetrag frei wird als bei der Anlagerung des ersten. Fig. 8 zeigt, daß die Isotopen- und Isotonenkurven bei ungeraden Punkten etwas nach oben durchknicken. Dieses Durchknicken muß auch bei den

schwereren Kernen merklich bleiben, um die Labilität aller Kerne mit zwei ungeraden Teilchenzahlen zu erklären. $^{14}_{7}N$ ist ja z. B. nach Fig. 8 stabil, obwohl es ebenfalls auf schwach nach oben durchknickenden Kurven liegt; dieselbe Situation könnte bei schwereren Kernen stets wieder eintreten, wenn ein Kern einmal ziemlich nahe am Energieminimum liegt. Wegen der geringeren Krümmung der Energiefläche bei schwereren Kernen wird dort allerdings ein, absolut genommen, geringes Durchknicken zur Erzielung der Instabilität genügen. Dieses Durchknicken kann von einer Anziehung zwischen den beiden Teilchen in derselben Schale herrühren. Es kann aber auch auf der folgenden „Störung zweiter Näherung" beruhen: Durch die Anziehung des ersten angefügten Neutrons (für Protonen verläuft die Überlegung analog) wird der Kern so deformiert, daß seine Protonen dem Gebiet näherrücken, indem dieses sich hauptsächlich aufhält (in dem der Betrag seiner Eigenfunktion groß ist). Da das zweite Neutron dieselbe räumliche Eigenfunktion erhält wie das erste, findet es von vornherein ein stärkeres Kraftfeld vor als dieses. Ein Beispiel für die Wirksamkeit dieses Effekts liefert der große Massendefekt des α-Teilchens (§ 15). Natürlich begeben wir uns aber mit derartigen Erklärungen der empirischen Gesetze in ein noch wenig gesichertes Gebiet.

Im ganzen scheint das Schalenmodell, da es die Protonen nicht vor den Neutronen auszeichnet, den Erfahrungen über die Auszeichnung gerader Teilchenzahlen etwas besser zu entsprechen als das α-Teilchenmodell. In derselben Richtung weist das Auftreten ausgezeichneter Neutronenzahlen (§ 9, Schluß), während die nach dem LANDÉschen kombinierten Modell zu erwartenden $(N-Z)$-Werte weniger hervortreten. Ob man allerdings im Auftreten derselben Zahlen 50 und 82 für Neutronen und Protonen ($Z = 82$ bedeutet das Ende der Radioaktivität) mehr als einen Zufall sehen soll (W. ELSASSER, 28), bleibt fraglich. Eher wird man aus der Betonung der Zweierschalen schließen, daß ein reines Schalenmodell (das höhere Periodizitäten liefert) mangelhaft ist und zum mindesten durch eine nächste Näherung korrigiert werden muß, die eine gewisse Tendenz der Teilchen zur Komplexbildung, d. h. eine Annäherung an das α-Teilchenmodell enthält.

§ 12. Quantitative Fassung des Tröpfchenmodells

Wir suchen als Zusammenfassung der phänomenologischen Überlegungen eine Interpolationsformel für die Bindungsenergien aufzustellen, die den bisher entwickelten Vorstellungen entspricht, und deren aus der Erfahrung

bestimmte Parameter daher als Maßzahlen für die im Tröpfchenmodell vorgesehenen Energiebeträge gelten können (94).

Im Ansatz (10.1) für die Volumenenergie müssen wir noch über die Funktion $f\left(\frac{N}{Z}\right)$, d. h. über die Form der (um Oberflächenspannung und Coulombenergie korrigierten) Isobarenkurven von Fig. 8 verfügen. Da sie hinsichtlich Vertauschung von Z und N (Spiegelung an der Ordinatenachse in Fig. 7) symmetrisch sein soll, setzen wir sie bei $Z = N$ als quadratische Funktion von (Z/N) an. Ferner soll sie nahezu linear in die Abszissenachse einmünden. Um den wirklichen Kurvenverlauf wenigstens im Gebiet der stabilen Kerne ($N \approx Z$) gut darzustellen, brauchen wir eine Funktion mit mindestens zwei unabhängigen Parametern, von denen der eine die Volumenenergie für $N = Z$ und der zweite die Änderung der Energie bei Änderung des Mischungsverhältnisses mißt. Wir wählen die Form einer Hyperbel:

$$E_V = -\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2\left(\frac{Z-N}{Z+N}\right)^2}\right)(Z+N). \qquad (12.1)$$

Die Volumenenergie pro Teilchen bei $Z = N$ ist nach (12.1):

$$\varepsilon = \alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \qquad (12.2)$$

und die Volumenenergie pro Proton bei sehr großem Neutronenüberschuß (und umgekehrt)

$$\eta = -\frac{2\beta^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \qquad (12.3)$$

Die für die Oberflächenspannung charakteristische Funktion $g(N/Z)$ setzen wir gleich $f(N/Z)$, da ihr Einfluß nicht groß genug ist, um die Einführung neuer unbestimmter Parameter zu rechtfertigen und die Oberflächenspannung, als eine rein geometrisch-kinematisch bedingte Korrektur der Volumenenergie, einen ähnlichen Verlauf wie diese haben wird. Wir setzen also

$$E_O = -\gamma \frac{E_V}{(Z+N)^{1/3}}. \qquad (12.4)$$

Für die leichtesten Kerne sind diese aus der Flüssigkeitsvorstellung stammenden Formeln sicher nicht mehr anwendbar; sie können dort höchstens als erste Glieder einer Entwicklung nach $1/Z$ und $1/N$ angesehen werden. Es wäre daher wünschenswert, das nächste Glied dieser Entwicklung noch zu berücksichtigen. Eine Untersuchung der Massendefekte der leichtesten Kerne zeigt, daß eine sehr gute Darstellung der Erfahrung erreicht wird, wenn man die Flüssigkeitsenergie nicht zu $(Z+N)$, sondern zu $(Z+N-1)$ proportional setzt. Die Formel enthält dann im Prinzip

auch die Grenzfälle der allereinfachsten Kerne. Für ein einzelnes Proton oder Neutron muß sich ja gerade der Massendefekt Null und für das Deuteron ungefähr einmal, für ${}^3_1\mathrm{T}$ und ${}^3_2\mathrm{He}$ ungefähr zweimal die elementare Bindungsenergie zwischen zwei ungleichen Teilchen ergeben. Es ist konsequent, nun auch die Oberflächenspannung proportional zu $(Z+N-1)^{2/3}$ zu setzen.

Zu dem Ausdruck (10.2) für die Coulombenergie muß, wenigstens für die leichteren Kerne, ein Korrekturglied treten, das von der quantenmechanischen Resonanz zwischen den Wellenfunktionen der Protonen herrührt. Es ist im Anhang nach der Thomas-Fermi-Methode berechnet und lautet

$$E_{\mathrm{R}} = -\frac{3e^2}{r}\left(\frac{Z}{2}\right)^{4/3}. \tag{12.5}$$

Der Kernradius wurde in (10.2) als unabhängig von (N/Z) angesehen. In Wirklichkeit wird mit abnehmender Bindungsenergie auch die Dichte der Kernmaterie abnehmen; um diesen Effekt wenigstens in grober Näherung zu berücksichtigen, wählen wir, als rechnerisch einfachsten Ansatz, eine lineare Änderung von $1/r$ mit $|Z-N|$:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0(Z+N)^{1/3}}\left(1-\delta\frac{|Z-N|}{Z+N}\right). \tag{12.6}$$

Unter den Abweichungen vom primitiven Tröpfchenmodell wollen wir nur die Auszeichnung gerader Teilchenzahlen berücksichtigen. Da wir für das Durchknicken der Isotopen- und Isotonenkurven nach oben keinen quantitativen Ansatz machen können, beschränken wir uns darauf, die Energiewerte ungerader Kerne durch lineare Interpolation zwischen denen ihrer geraden Nachbarn zu bestimmen, so wie es sich aus dem Schalenmodell in erster Näherung ergibt. Vielleicht wird die genauere Kenntnis der Zerfallsenergien der zahlreichen künstlichen Radioaktiven hier zu einer Verbesserung des Ansatzes führen. Die Interpolationsformel lautet nunmehr:

$$\left.\begin{aligned} &E(Z,N)\\ &= \left(-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\sqrt{\alpha^2+\beta^2\left(\frac{Z-N}{Z+N}\right)^2}\right)\left[(Z+N-1)-\gamma(Z+N-1)^{2/3}\right]\\ &\qquad + \frac{3e^2}{r_0(Z+N)^{1/3}}\left(1-\delta\frac{|Z-N|}{Z+N}\right)\left[\frac{Z^2}{5}-\left(\frac{Z}{2}\right)^{4/3}\right], \end{aligned}\right\} \tag{12.7}$$

$$E(Z,N+1) = \tfrac{1}{2}\left[E(Z,N)+E(Z,N+2)\right], \tag{12.8}$$

$$E(Z+1,N) = \tfrac{1}{2}\left[E(Z,N)+E(Z+2,N)\right], \tag{12.9}$$

$$\left.\begin{aligned} &E(Z+1,N+1)\\ &= \tfrac{1}{4}\left[E(Z,N)+E(Z,N+2)+E(Z+2,N)+E(Z+2,N+2)\right] \end{aligned}\right\} \tag{12.10}$$

(Z und N gerade.)

Um durch (12.7) den Verlauf der Energiefläche möglichst gut darzustellen, fordert man etwa, daß E für drei Kerne ($^{16}_{8}$O, $^{100}_{42}$Mo, $^{200}_{80}$Hg den empirischen Wert haben solle, und außerdem, daß $\left(\frac{\partial E}{\partial(Z-N)}\right)_{Z+N}$, d. h. die beim β-Zerfall freiwerdende Energie an zwei Stellen (Mo und Hg) für die empirisch gegebene Stelle der Talsohle verschwinden solle. Es ergeben sich die Parameterwerte

$$\alpha = 2{,}886, \quad \beta = 16{,}02, \quad \gamma = 0{,}733, \quad \delta = 1{,}499, \quad r_0 = 0{,}51. \qquad (12.11)$$

Den Vergleich der aus (12.7) mit (12.11) folgenden Packungsanteile mit den beobachteten zeigt Fig. 9. In Fig. 10 ist ferner der aus dieser Formel folgende Verlauf der Talsohle eingetragen. Der mittlere Verlauf scheint befriedigend dargestellt, während natürlich die Schwankungen ohne Einführung einer Schalenvorstellung nicht wiedergegeben werden können. Für die Zerfallsenergien der α-Strahler ergeben sich Werte zwischen 1 und 4 Mill. Volt, also erheblich weniger als die beobachteten Werte (Tabelle 6, § 21). Nun ist eine genaue Bestimmung der α-Energie, die als kleine Differenz großer Zahlen auftritt, nach einer so rohen Methode kaum zu erwarten; immerhin könnte man fragen, ob nicht der Fehler größer ist, als es der allgemeinen Ungenauigkeit der Methode entspricht, und damit

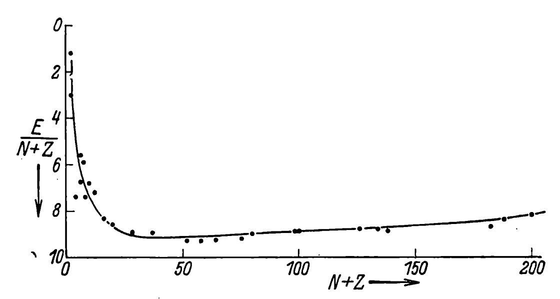


Fig. 9. Packungsanteile als Funktion der Teilchenzahl (Punkte experimentell, Kurve theoretisch).

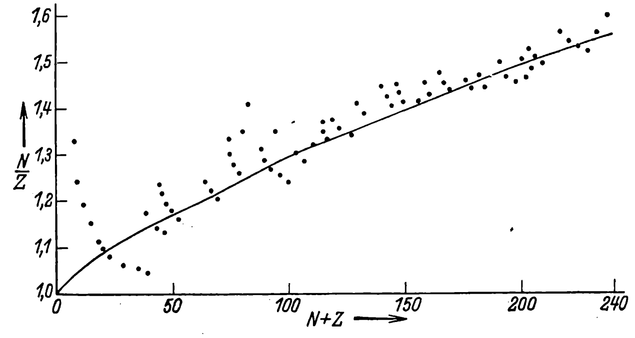


Fig. 10. Lage der stabilen Isotope (Kurve: theoretisches Energieminimum).

ebenfalls auf ein relativ ausgeprägtes Schalenphänomen bei den natürlichen Radioaktiven deutet. Die β-Zerfallsenergien, die aus den ungenauen Interpolationsformeln (12.8) bis (12.10) folgen, haben natürlich keinen Anspruch auf quantitative Bedeutung. Interessant ist dagegen ein Vergleich der aus (12.11) folgenden Kernradien mit den direkt beobachteten (Fig. 11). Da die theoretischen Radien lediglich aus energetischen Argumenten über die Größe der Coulombkraft gewonnen sind, ist die Übereinstimmung der Größenordnung ein wichtiger Hinweis auf die objektive physikalische Bedeutung der Vorstellungen des Tröpfchenmodells.

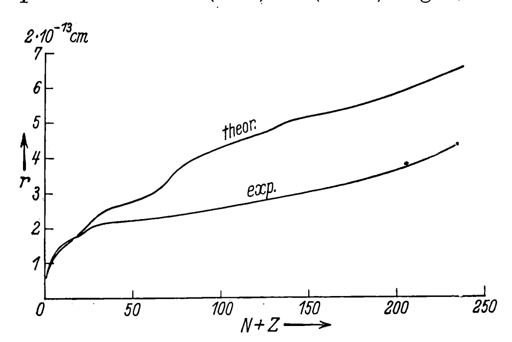


Fig. 11. Kernradien empirisch und theoretisch.

Die Bindungsenergien der leichtesten Kerne werden durch die Konstanten (12.11) nicht sehr gut wiedergegeben. Wählt man dagegen die Parameterwerte[1])

$$\alpha = 1{,}6 \qquad \beta = 13{,}9 \qquad \gamma = 0{,}6 \qquad r_0 = 0{,}45, \tag{12.12}$$

so erhält man die in Fig. 12 gezeigte, sehr befriedigende Übereinstimmung. Der Fehler liegt für alle Kerne mit gerader Ladung und Masse außer dem experimentell unsicheren $^{18}_{8}O$ und dem α-Teilchen, das durch das Flüssigkeitsmodell sicher nicht mehr dargestellt werden kann, unter 1%; auch die lineare Interpolation bewährt sich für die schwereren Kerne recht gut. Bringt man das schwache Durchknicken nach oben, das die Erfahrung für $^{14}_{7}N$ fordert, an dem theoretischen Wert für $^{18}_{9}F$ an, so wird dieser

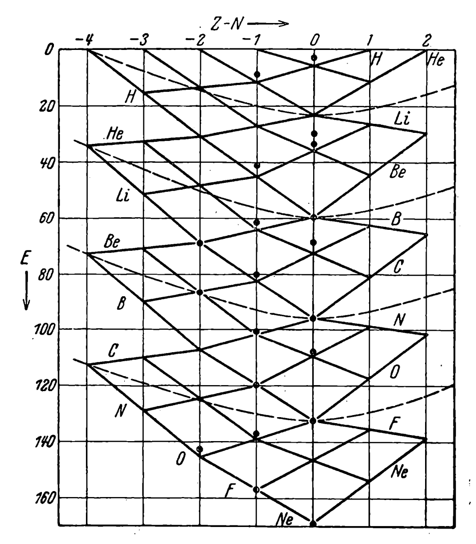


Fig. 12. Bindungsenergien der leichten Kerne. Punkte experimentell, Geradennetz theoretisch. Koordinaten wie Fig. 8.

[1]) Das Glied mit δ kann hier vernachlässigt werden.

Kern gerade labil. Daß eine so geschlossene Darstellung dieses Gebiets möglich ist mit Parameterwerten, die von den mittleren (12.11) beträchtlich abweichen, scheint wieder auf eine Windung der Energiefläche hinzuweisen.

§ 13. Ansätze zur Systematik der Kernmomente

Außer den Bindungsenergien (und den Reaktionswahrscheinlichkeiten für Zerfall und künstliche Umwandlung) sind fast die einzigen Kerneigenschaften, die wir kennen, die Wirkungen der Kernstruktur auf die optischen Spektren der Elemente: der Intensitätswechsel in Bandenspektren und die Hyperfeinstruktur (Hfs.) der Linienspektren. Auf die Theorie ihres Zustandekommens, die ein Teil der Theorie der Atomhülle ist, gehen wir hier nicht ein (Grundlagen und Zitate vgl. 11a). Die Daten über die Kerne, die sie liefern, zerfallen in vier Gruppen:

1. Mechanische Drehmomente der Kerne. Ihre Werte folgen aus dem Intensitätsverhältnis benachbarter Linien in Bandenspektren zweiatomiger Moleküle mit gleichen Kernen und aus der Multiplizität der Hfs.-Aufspaltungen.
2. Magnetische Dipolmomente. Ihre Beträge lassen sich aus der Größe der Hfs.-Aufspaltungen berechnen, wenn die Werte der Eigenfunktionen der Leuchtelektronen in Kernnähe bekannt sind. Direkt lassen sie sich aus dem in einigen Fällen beobachteten Zeemaneffekt der Hfs. entnehmen. Die magnetischen Momente der beiden leichteren Wasserstoffisotope sind direkt im inhomogenen Feld gemessen worden (86, 78).
3. Elektrische Quadrupolmomente. Ihr Vorhandensein läßt sich aus Hfs.-Aufspaltungen erschließen, die nicht der LANDÉschen Intervallregel folgen (83).
4. Abweichungen des elektrischen Feldes vom Coulombfeld der Punktladung Ze im Kerninnern. Sie lassen sich aus demjenigen Teil der Hfs. entnehmen, der nicht von einer Aufspaltung der Linien eines Isotops, sondern von der verschiedenen Lage der Linien verschiedener Isotope desselben Elements herrührt („Isotopenverschiebung“ der Linien) und auf einer Verschiedenheit der Kraft auf das Leuchtelektron im Kerninnern der verschiedenen Isotope beruhen muß. —

Verhältnismäßig genau bekannt sind bisher nur die mechanischen Momente (Tabelle 2), da bei ihrer Bestimmung nur eine Entscheidung zwischen einer kleinen Zahl diskreter Werte notwendig ist. Für sie gelten

die folgenden Regeln, von denen bisher keine Ausnahme bekannt ist: Alle Kerne gerader Protonen- und Neutronenzahl haben das Moment Null; alle Kerne mit einer ungeraden Teilchenzahl haben ein halbzahliges Moment; die Kerne mit zwei ungeraden Teilchenzahlen haben ein ganzzahliges Moment (von ${}^{2}_{1}\mathrm{D}$ bis ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$ vermutlich 1). Die Regeln über Halb- und Ganzzahligkeit folgen (wenn man dem Neutron den Spin $^1/_2$ zuschreibt) unmittelbar aus dem Aufbau der Kerne aus Protonen und Neutronen. Das Verschwinden der Momente aller „geraden" Kerne ist dagegen ein aus der Theorie nicht unmittelbar folgendes wichtiges empirisches Gesetz; allerdings sei hervorgehoben, daß man bei vielen Kernen nur auf die Kleinheit des magnetischen Moments aus der Hfs. schließen kann und daher der Fall von Kernen mit endlichem mechanischem, aber nahezu oder ganz verschwindendem magnetischem Moment noch vorkommen könnte. Bei ungerader Neutronenzahl ist das Moment $\frac{1}{2}\hbar$ am häufigsten, während bei ungerader Protonenzahl der Wert $\frac{3}{2}\hbar$ überwiegt und auch größere Momente ziemlich häufig vorkommen. Über diese statistischen Regeln hinaus konnte ein einfacher Zusammenhang der Momente mit den übrigen Kerneigenschaften bisher nicht aufgefunden werden.

Die magnetischen Momente verschwinden naturgemäß bei allen den Kernen, deren mechanisches Moment Null ist. Die magnetischen Momente der übrigen Kerne sind recht ungenau bekannt (vgl. Tabelle 2), weil der Schluß von der beobachteten Hfs.-Aufspaltung auf das magnetische Moment eine schwer erreichbare Genauigkeit in der Kenntnis der Elektroneneigenfunktionen im Atom voraussetzt. Die überraschendste Tatsache ist hier die Abweichung des magnetischen Momentes des Protons von dem durch die DIRACsche Theorie geforderten Wert μ_K. Im übrigen gilt die Regel (84): Kerne mit ungerader Protonenzahl haben stets positive Momente (d. h. Momente von derselben Richtung wie das Protonenmoment), deren absolute Größe der des Protonenmoments häufig nahekommt und sie gelegentlich übertrifft; Kerne mit ungerader Neutronenzahl haben Momente, deren Vorzeichen sowohl positiv wie negativ sein kann und deren absolute Größe meist unter $|\mu_K|$ liegt. Die Momente der vier leichten Kerne mit ungeraden Teilchenzahlen scheinen positiv und ebenfalls kleiner als μ_K zu sein.

Die bisher bekannten Quadrupolmomente sind in Tabelle 3 angegeben. Das Quadrupolmoment q ist definiert als der Mittelwert des Ausdrucks $r^2(3\cos^2\Theta - 1)$, genommen über die elektrische Dichteverteilung des Kerns in dem Zustand, in welchem der Drehimpuls des Kerns in der z-Achse orientiert ist, d. h. $m_i = i$; r und Θ sind Polarkoordinaten. Die Anzahl

gemessener q ist zu gering, um die Aufstellung allgemeiner Regeln zu erlauben. Bemerkenswert ist, daß nicht nur abgeplattete ($q < 0$), sondern auch in der Achsenrichtung verlängerte Ladungsverteilungen ($q > 0$) vorzukommen scheinen.

Die Abweichungen vom Coulombschen Gesetz, die notwendig sind, um die Isotopenverschiebungen zu erklären, stimmen ungefähr mit den wegen der endlichen Größe der Ladungsverteilung des Kerns zu erwartenden Abweichungen überein. Im ganzen ergibt sich die Variation des Kernradius mit der Neutronenzahl als überraschend klein (80). —

Eine systematische Theorie der Kernspins müßte die oben angegebenen empirischen Regeln und darüber hinaus womöglich die Momente der einzelnen Kerne erklären. Sie würde dadurch einen entscheidenden Beitrag zur Kenntnis der Schalenstruktur der Kerne liefern. Daß sie bisher nicht gelungen ist, dürfte neben der Unvollständigkeit des Erfahrungsmaterials vor allem daran liegen, daß die Momente allem Anschein nach sehr empfindlich von den Einzelheiten der Kernstruktur abhängen. Die folgenden Betrachtungen mögen die bestehenden Schwierigkeiten andeuten.

Das Verschwinden der Momente aller geraden Kerne beruht zweifellos auf derselben Eigenschaft des Kernbaus wie die energetische Auszeichnung gerader Teilchenzahlen. Erklärt man es durch die in § 11 vorgeschlagenen Zweierschalen, so müßte man die Momente der Kerne mit einer ungeraden Teilchenzahl jeweils dem einen unpaarigen Proton oder Neutron zuschreiben. Der Vergleich der drei Kerne

$$^{19}_{9}\mathrm{F}\ (i = \tfrac{1}{2}\,,\ \mu \approx 3)\,, \quad ^{27}_{13}\mathrm{Al}\ (i = \tfrac{1}{2}\,,\ \mu = 1{,}9)\,, \quad ^{31}_{15}\mathrm{P}\ (i = \tfrac{1}{2}\,,\ \mu < 0{,}5)\,,$$

die jeweils ein unpaariges Proton haben und sich nur um je ein oder zwei α-Teilchen unterscheiden, zeigt, daß man die empirischen Momente keinesfalls immer als Summe von Bahn- und Spinmoment *eines* Teilchens erklären kann, einerlei welches magnetische Eigenmoment man ihm auch geben mag. Man müßte also die Beeinflussung des Restkerns durch das unpaarige Teilchen berücksichtigen, was in theoretisch befriedigender Weise bis jetzt nicht geschehen ist. Im Grunde bedeutet schon das Vorhandensein von mechanischen Momenten, die größer sind als das Spinmoment *eines* Teilchens, eine ernste Schwierigkeit für das Modell der Zweierschalen. Denn der Überschuß kann entweder von den Momenten anderer Teilchen herrühren; dann wären die Schalen nicht „abgeschlossen“, und man müßte erst einen Mechanismus erfinden, der diese Momente veranlaßt, sich gerade bei der Hinzufügung jedes zweiten Teilchens wieder

antiparallel zu stellen. Oder der Überschuß des Moments rührt von einem Bahnmoment des unpaarigen Teilchens selbst her, dann befindet sich das Teilchen in einem entarteten Zustand (nur S-Zustände sind einfach) und das Zustandekommen der Zweierschalen kann nicht durch das Fehlen entarteter Zustände, sondern nur in einer noch nicht geklärten Weise durch die Wechselwirkung der Teilchen erklärt werden.

Eine weitere Schwierigkeit liegt in der Frage nach dem magnetischen Moment des Neutrons. Man könnte nämlich annehmen, daß die Störung des Restkernes durch das unpaarige Teilchen im allgemeinen nicht sehr groß sei und daher die Momente der ungeraden Kerne wenigstens mit einem Fehler von etwa 50% gleich dem Moment des unpaarigen Teilchens gesetzt werden dürften. Man könnte die oben angegebene Regel über die magnetischen Momente dann durch die Annahme erklären, daß das Moment des Protons den direkt gemessenen Wert $\approx 3\mu_K$ habe, während das Moment des Neutrons kleiner als μ_K sei. Andererseits läßt sich das Neutronenmoment aus dem Moment des Deuterons bestimmen. Da, mindestens bei Kleinheit der Spinkräfte im Kern, zu erwarten ist, daß der Grundzustand des Deuterons kein Bahnmoment besitzt, muß sein mechanisches Moment 1 von Parallelstellung der Spins des Neutrons und des Protons herrühren. Wenn somit auch sein magnetisches Moment die Summe von μ_p und μ_n ist, folgt $\mu_n \approx -2{,}2\,\mu_K$. Man wird die zweite Bestimmung des Neutronenmoments für die zuverlässigere halten, verliert aber damit die Möglichkeit einer einfachen Erklärung der empirischen Regel über die Größenordnung der magnetischen Momente.

Eine Erklärung des unerwartet hohen Moments des Protons selbst liegt natürlich außerhalb der Reichweite der Spinsystematik. Man könnte aber fragen, ob diese Abweichung von der Theorie nicht auch die Verwendung des Vektormodells für die Momente der Teilchen im Kern (d. h. überhaupt die Beschreibung ihrer magnetischen Wirkungen durch feste Dipolmomente) als unberechtigt erweist. Wir versuchen in § 41, eine Erklärung des Protonenmoments auf Grund der Theorie des β-Zerfalls zu geben, nach der das Vektormodell immerhin bis auf Fehler der Größenordnung 10% richtig sein sollte. Die Schwierigkeit dürfte auch in der Tat nicht im Mangel, sondern im Überfluß an Möglichkeiten der Darstellung der Kernmomente als Summe von Momenten einzelner Teilchen liegen. Auf die in dieser Richtung unternommenen Versuche (vgl. 11a, 83) gehen wir nicht näher ein. Da in ihnen die Kopplungskräfte zwischen den einzelnen Spin- und Bahnvektoren rein elektromagnetisch abgeschätzt sind, während in Wirklichkeit (§ 41) wesentlich größere spinabhängige Kräfte als

Tabelle 2. Kernmomente. (Mechanische in Einheiten $\hbar$, magnetische in Einheiten μ_K)

a) Z und N gerade

Nach den bisherigen Beobachtungen stets $i = 0$, $\mu = 0$.

b) Z ungerade

Element	Z	A	i	μ	Element	Z	A	i	μ
H	1	1	$^1/_2$	$2,8 \pm 0,5$	Ag	47	107		klein
Li	3	7	$^3/_2$	3,29			109		klein
F	9	19	$^1/_2$	3 ± 1	In	49	115	$^9/_2$	5,3
Na	11	23	$^3/_2$	2,1	Sb	51	121	$^5/_2$	$\sim 2,7$
Al	13	27	$^1/_2$	1,9			123	$^7/_2$ oder $^5/_2$	~ 2
P	15	31	$^1/_2$	klein	J	53	127	$^5/_2$?	> 0
Cl	17	35	$^5/_2$	klein	Cs	55	133	$^7/_2$	2,9
		37	$^5/_2$	klein	La	57	139	$^7/_2$	$\sim 2,7$
K	19	39	$^3/_2$	$-0,57$	Pr	59	141	$^5/_2$	> 0
Sc	21	45	$^7/_2$	$3,6 \pm 1$	Eu	63	151	$^5/_2$	> 0
V	23	51	$^7/_2$	> 0			153	$^5/_2$	> 0
Mn	25	55	$^5/_2$	> 0	Tb	65	159	$^3/_2$	> 0
Co	27	59	$^7/_2$	> 0	Ho	67	165	$^7/_2$	> 0
Cu	29	63	$^3/_2$	2,5	Tu	69	169	$^1/_2$	> 0
		65	$^3/_2$	2,6	Cp	71	175	$^7/_2$	> 0
Ga	31	69	$^3/_2$	$2,1 \pm 0,3$	Ta	73	181	$^7/_2$	> 0
		71	$^3/_2$	$2,7 \pm 0,3$	Re	75	185	$^5/_2$	> 0
As	33	75	$^3/_2$	0,9			187	$^5/_2$	> 0
Br	35	79	$^3/_2$	> 0	Au	79	197	$^3/_2$	$\sim 0,2$
		81	$^3/_2$	> 0	Tl	81	203	$^1/_2$	1,5
Rb	37	85	$^5/_2$	1,5			205	$^1/_2$	1,5[1]
		87	$^3/_2$	3,1	Bi	83	209	$^9/_2$	3,8
Nb	41	93	$^9/_2$	> 0	Pa	91	231	$^3/_2$	> 0

[1]) $\mu_{205} : \mu_{203} = 1,008$.

c) N ungerade

Element	Z	A	i	μ	Element	Z	A	i	μ
n	0	1	$^1/_2$	$-2 \pm 0,6$	X	54	129	$^1/_2$	< 0
Zn	30	67	$^5/_2$ oder $^3/_2$	$1 \pm 0,3$			131	$^3/_2$	> 0
Kr	36	83	$\geq {^7/_2}$	< 0	Ba	56	135	$^5/_2$ oder $^3/_2$	
Sr	38	87	$\geq {^3/_2}$	$-0,9$			137	$^5/_2$ oder $^3/_2$	
Cd	48	111	$^1/_2$	$-0,6$	Hf	72		$\leq {^3/_2}$	
		113	$^1/_2$	$-0,6$	Hg	80	199	$^1/_2$	$\sim 0,55$
Sn	50	117	$^1/_2$	$-0,95$			201	$^3/_2$	$\sim -0,62$[1]
		119	$^1/_2$	$-0,95$	Pb	82	207	$^1/_2$	0,6

[1]) $\mu_{199} : \mu_{201} = -0,9018$.

d) Z und N ungerade

Element	Z	A	i	μ
H	1	2	1	$0,7 \pm 0,2$
Li	3	6	1?	$0,6 \pm 0,2$
N	7	14	1	$\leq 0,2$

relativistische Ergänzung der Austauschkraft zu erwarten sind, können sie wohl noch nicht als endgültig betrachtet werden.

Eine Theorie der Quadrupolmomente liegt noch nicht vor. Die Abplattung der Ladungsverteilung könnte durch einen Drehimpuls der Protonen gedeutet werden, während die verlängerten Formen nicht leicht verständlich erscheinen.

Tabelle 3. Quadrupolmomente. (Nach SCHÜLER und SCHMIDT)

Element	Z	A	q
Cu	29	63	$\sim -0{,}3 \cdot 10^{-24}$ cm²
		65	$\sim -0{,}3$
As	33	75	$\sim +0{,}2$
Eu	63	151	$+1{,}5$
		153	$+3{,}2$
Cp	71	175	$+6{,}1$
Hg	80	201	$+0{,}5$
Bi	83	209	$-0{,}4$

2. Quantenmechanische Theorie

§ 14. Austauschkraft und Absättigungsphänomen

Die gegenwärtige Aufgabe der quantenmechanischen Theorie des Kernbaus ist es, die Konsequenzen bestimmter Annahmen über die im Kern wirksamen Kräfte zu untersuchen und dadurch einer Bestimmung der Kernkräfte und einer Erklärung der Kerneigenschaften aus diesen Kräften näherzukommen. Wir haben Grund zu der Vermutung, daß die wichtigste Kraft im Kern eine Austauschkraft zwischen Proton und Neutron ist. Wir werden daher zunächst eine mathematische Fassung des Begriffs der Austauschkraft einführen und ihre wichtigste Eigenschaft, die Absättigung, an einigen Beispielen vorführen, um dann die vorliegenden Ansätze zur quantenmechanischen Berechnung der Eigenschaften des Kernbaus darzustellen.

Beim Elementarakt der Wechselwirkung zwischen Proton und Neutron verwandelt sich nach der Austauschhypothese das Proton in ein Neutron und umgekehrt; d. h. die Orte der beiden Teilchen werden durch die Wechselwirkung vertauscht (was mit dem Spin der Teilchen geschieht, beachten wir zunächst nicht). Dem entspricht die bequemste Schreibweise der Austauschkraft: während die „gewöhnliche“ Kraft definiert ist durch die Angabe der potentiellen Energie als Funktion des Teilchenabstandes

$V(\mathfrak{r}_p - \mathfrak{r}_n)$, ist die entsprechende Funktion für die Austauschkraft, die meist mit dem Buchstaben J bezeichnet wird, noch mit dem Permutationsoperator $P(\mathfrak{r}_p \mathfrak{r}_n)$ multipliziert, der die Ortskoordinaten der beiden Teilchen vertauscht. P ist definiert durch die Gleichung

$$P(\mathfrak{r}_p \mathfrak{r}_n) f(\mathfrak{r}_p \mathfrak{r}_n) = f(\mathfrak{r}_n \mathfrak{r}_p), \tag{14.1}$$

die für jede beliebige Funktion f der Koordinaten $\mathfrak{r}_p$ und $\mathfrak{r}_n$ gilt. Die mittlere potentielle Energie zwischen den beiden Teilchen in dem Zustand, der durch die Eigenfunktion $\psi(\mathfrak{r}_p \mathfrak{r}_n)$ definiert ist, hat demnach die Form

$$\left.\begin{aligned} \overline{E}_{\text{pot}} &= \int \psi^*(\mathfrak{r}_p \mathfrak{r}_n) J(\mathfrak{r}_p - \mathfrak{r}_n) P(\mathfrak{r}_p \mathfrak{r}_n) \psi(\mathfrak{r}_p \mathfrak{r}_n) d\mathfrak{r}_p \, d\mathfrak{r}_n \\ &= \int \psi^*(\mathfrak{r}_p \mathfrak{r}_n) J(\mathfrak{r}_p - \mathfrak{r}_n) \psi(\mathfrak{r}_n \mathfrak{r}_p) d\mathfrak{r}_p \, d\mathfrak{r}_n , \end{aligned}\right\} \tag{14.2}$$

und die Schrödingergleichung für die Bewegung eines Protons und eines Neutrons unter dem Einfluß der Austauschkraft lautet

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m_p} \Delta_p + \frac{\hbar^2}{2m_n} \Delta_n + E\right) \psi(\mathfrak{r}_p \mathfrak{r}_n) - J(\mathfrak{r}_p - \mathfrak{r}_n) \psi(\mathfrak{r}_n \mathfrak{r}_p) = 0, \tag{14.3}$$

wobei die Indizes p und n stets „Proton“ und „Neutron“ bedeuten.

Die Begründung für die Darstellung des anschaulichen Begriffs der Austauschkraft durch gerade diesen Formalismus erscheint vielleicht etwas unvollständig. Es sei aber betont, daß man den anschaulichen Begriff, den wir verwendet haben, umgekehrt erst eingeführt hat, als Kraftwirkungen der durch (14.2) beschriebenen Art bei der Molekülbildung entdeckt wurden. Zum strengen Beweis dafür, daß auch der in § 6 geschilderte Prozeß des Ladungsaustauschs gerade zu dieser hier aus der Analogie zu den Molekülproblemen übernommenen Formel führt, bedarf es einer Theorie des β-Zerfalls; wir holen ihn daher erst in § 41 nach.

Eine Zweideutigkeit der obigen Formulierung tritt auf, wenn wir den Spin der beiden Teilchen mit berücksichtigen. Wenn nämlich ihre Spinrichtungen einander entgegengesetzt sind, sollen dann nur die Ladungen oder auch die Spinrichtungen vertauscht werden, d. h. haftet der Spin am Ort oder an der Ladung? Da Relativitätseffekte im folgenden nicht behandelt werden, berücksichtigen wir den Spin in der Paulischen Näherung, indem wir eine vierte Koordinate ϱ_p bzw. ϱ_n einführen, die gleich $+1$ ist, wenn der Spin des betreffenden Teilchens in der Richtung der positiven z-Achse des zugrunde gelegten Koordinatensystems weist, und gleich -1, wenn er in der entgegengesetzten Richtung orientiert ist. Wenn nun der Spin am Ort haftet, so hat das Proton nach dem Prozeß die Spinrichtung, die vor dem Prozeß das (an diesem selben Platz befindliche) Neutron hatte und umgekehrt; gleichzeitig mit den

Ortskoordinaten werden also auch die Spinkoordinaten vertauscht (Annahme von HEISENBERG; Fig. 13, I). Haftet der Spin umgekehrt an der Ladung, so behält sowohl das Proton wie das Neutron beim Platzwechsel seinen Spin; d. h. der Permutationsoperator vertauscht nur die Ortskoordinaten (Annahme von MAJORANA; Fig. 13, II). Die mittleren potentiellen Energien lauten in den beiden Fällen:

Fig. 13. Die beiden Typen der Austauschwechselwirkung.

$$\left.\begin{aligned} \text{I:}\quad \bar{E}_{\text{pot}} &= \sum_{\varrho_p \varrho_n} \int \psi^*(\mathfrak{r}_p \mathfrak{r}_n \varrho_p \varrho_n) J(\mathfrak{r}_p - \mathfrak{r}_n, \varrho_p, \varrho_n) \psi(\mathfrak{r}_n \mathfrak{r}_p \varrho_n \varrho_p) d\mathfrak{r}_p d\mathfrak{r}_n, \\ \text{II:}\quad \bar{E}_{\text{pot}} &= \sum_{\varrho_p \varrho_n} \int \psi^*(\mathfrak{r}_p \mathfrak{r}_n \varrho_p \varrho_n) J(\mathfrak{r}_p - \mathfrak{r}_n, \varrho_p, \varrho_n) \psi(\mathfrak{r}_n \mathfrak{r}_p \varrho_p \varrho_n) d\mathfrak{r}_p d\mathfrak{r}_n. \end{aligned}\right\} \quad (14.4)$$

Die Annahme I erscheint nach der gesamten Herleitung der Kernkräfte aus der Vorstellung eines Ladungsaustausches als die natürlichere, sie folgt auch ungezwungener aus der Theorie des β-Zerfalls (§ 41). Wir werden aber weiter unten sehen, daß sehr starke empirische Gründe für II bestehen.

Wir untersuchen nun die Wechselwirkung zwischen den Protonen und Neutronen, welche durch die potentiellen Energien (14.4) vermittelt wird. Definitionsgemäß tritt Anziehung zwischen zwei Teilchen auf, wenn ihre mittlere gegenseitige potentielle Energie negativ ist, Abstoßung, wenn sie positiv ist. Bei einer normalen Kraft wird das Vorzeichen von $\bar{E}_{\text{pot}}$ durch das Vorzeichen der Potentialfunktion V bestimmt, da der Faktor

$$\psi^*(\mathfrak{r}_p \mathfrak{r}_n) \psi(\mathfrak{r}_p \mathfrak{r}_n) = |\psi(\mathfrak{r}_p \mathfrak{r}_n)|^2$$

stets positiv ist. Bei der Austauschkraft hängt das Vorzeichen des ψ-Produkts dagegen vom Symmetriecharakter der Eigenfunktion hinsichtlich der Vertauschung der Teilchenkoordinaten ab. Geht die Eigenfunktion $\psi(\mathfrak{r}_p \mathfrak{r}_n)$ bei Vertauschung der beiden Koordinaten in sich über (den Spin berücksichtigen wir wieder nachträglich):

$$\psi(\mathfrak{r}_p \mathfrak{r}_n) = \psi(\mathfrak{r}_n \mathfrak{r}_p), \tag{14.5}$$

so heißt sie bekanntlich symmetrisch hinsichtlich dieser Vertauschung; ändert sie dabei lediglich ihr Vorzeichen:

$$\psi(\mathfrak{r}_p \mathfrak{r}_n) = -\psi(\mathfrak{r}_n \mathfrak{r}_p), \tag{14.6}$$

so heißt sie antisymmetrisch hinsichtlich der Vertauschungsoperation. Alle Eigenfunktionen, die weder symmetrisch noch antisymmetrisch sind, lassen sich als Summe einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Funktion schreiben; sei etwa

$$\psi(\mathfrak{r}_p \mathfrak{r}_n) = \chi(\mathfrak{r}_n \mathfrak{r}_p) \tag{14.7}$$

und daher auch
$$\psi(\mathfrak{r}_n\mathfrak{r}_p) = \chi(\mathfrak{r}_p\mathfrak{r}_n) \tag{14.8}$$
(Umbenennung der Variablen), so schreibt man
$$\psi = \tfrac{1}{2}(\psi + \chi) + \tfrac{1}{2}(\psi - \chi), \tag{14.9}$$
wobei nun links und rechts dieselbe Reihenfolge der Argumente gilt; dann ist der erste Summand auf der rechten Seite symmetrisch, der zweite antisymmetrisch. Wir betrachten nun zunächst die Wechselwirkung II, die nur die Ortskoordinaten vertauscht. Das Produkt $\psi^*(\mathfrak{r}_p\mathfrak{r}_n\varrho_p\varrho_n)\psi(\mathfrak{r}_n\mathfrak{r}_p\varrho_p\varrho_n)$ ist positiv, je nachdem ob ψ symmetrisch oder antisymmetrisch hinsichtlich der Vertauschung von $\mathfrak{r}_p$ mit $\mathfrak{r}_n$ ist; bei gemischtem ψ zerfällt es in einen positiven und einen negativen Summanden. Es gibt demnach, unabhängig vom Vorzeichen von J, stets Eigenfunktionen, in denen die beiden Teilchen sich anziehen, und andere, in denen sie sich abstoßen. Dasselbe gilt für die Wechselwirkung I, mit dem einen Unterschied, daß es hier darauf ankommt, ob ψ hinsichtlich der gleichzeitigen Vertauschung von $\mathfrak{r}_p$ mit $\mathfrak{r}_n$ und von ϱ_p mit ϱ_n symmetrisch oder antisymmetrisch ist.

Das Vorzeichen von J ist wesentlich für die Frage, ob Absättigung eintritt. Ist J (entweder überall oder wenigstens im Mittel) negativ, so entspricht einer symmetrischen Eigenfunktion Anziehung, einer antisymmetrischen Abstoßung; umgekehrt, wenn J positiv ist. Nun gilt für Protonen und Neutronen jeweils das Pauliprinzip (dies folgt aus der in § 2 angegebenen Regel über das statistische Verhalten der Kerne); also muß die Eigenfunktion eines Kernes antisymmetrisch bei Vertauschung der (Orts- und Spin-) Koordinaten zweier Protonen oder zweier Neutronen unter sich sein; bezeichnen wir nach HUND (57) Koordinaten, bei deren Vertauschung ψ symmetrisch ist, durch Überstreichen: $\psi(\overline{\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2})$, Koordinaten, bei deren Vertauschung ψ antisymmetrisch ist, durch eine geschweifte Klammer: $\psi(\overbrace{\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2})$, und fassen die Orts- und Spinkoordinaten des i-ten Protons bzw. Neutrons durch den Buchstaben p_i bzw. n_i zusammen, so muß gelten
$$\psi = \psi(\overbrace{p_1p_2\ldots p_Z},\ \overbrace{n_1n_2\ldots n_N}). \tag{14.10}$$
Nun ist es bekanntlich möglich, eine Funktion aufzubauen, die in allen ihren Argumenten antisymmetrisch ist (vgl. Anhang I), d. h. eine Funktion vom Typ
$$\psi_a = \psi(\overbrace{p_1p_2\ldots p_Z\ n_1n_2\ldots n_N}). \tag{14.11}$$

Wenn also J positiv ist und ein Proton und ein Neutron, in deren Koordinaten ψ antisymmetrisch ist, sich daher anziehen, so ist es möglich, Anziehung zwischen jedem Proton und jedem Neutron zu erzielen; es tritt

keine Absättigung auf. Dagegen ist es unmöglich, eine Eigenfunktion in den Koordinaten eines Protons und eines Neutrons symmetrisch und gleichzeitig in denen zweier Neutronen oder Protonen antisymmetrisch zu machen, also etwa eine Funktion

$$\psi_S = \psi(\overline{p_1 \widetilde{n_1 n_2}}) \tag{14.12}$$

aufzubauen. Denn wenn man die Vertauschungen nacheinander vornimmt und dabei beachtet, daß der Symmetriecharakter der Funktion natürlich nicht am Namen, sondern am Ort der Variablen haftet [d. h. daß auch alle Formeln richtig sein müssen, die aus (14.12) durch Umbenennung der Variablen hervorgehen], so folgt aus (14.12)

$$\left.\begin{aligned}\psi(p_1 n_1 n_2) &= \psi(n_1 p_1 n_2) = -\psi(n_1 n_2 p_1) = -\psi(n_2 n_1 p_1)\\ &= \psi(n_2 p_1 n_1) = \psi(p_1 n_2 n_1) = -\psi(p_1 n_1 n_2)\,,\end{aligned}\right\} \tag{14.13}$$

also

$$\psi(p_1 n_1 n_2) = -\psi(p_1 n_1 n_2)\,, \tag{14.14}$$

was nur für $\psi = 0$ möglich wäre. Dies deutet darauf hin, daß bei negativem J durch Vermehrung der Teilchenzahl keine beliebige Vermehrung der potentiellen Energie erreicht werden kann. Wir zeigen dies quantitativ in zwei Grenzfällen.

Wir betrachten die HARTREEsche Näherung, d. h. die Näherung, in der jedem Teilchen eine individuelle Eigenfunktion $\psi(\mathfrak{r}\varrho)$ zugeschrieben werden kann und die Gesamteigenfunktion ein Produkt dieser Einzel-ψ ist. Wir nehmen ferner an, die Funktion $J(\mathfrak{r}_p - \mathfrak{r}_n)$ variiere nur langsam in einem Gebiet von der Größenordnung der räumlichen Erstreckung der Eigenfunktionen; diese Annahme ist natürlich in der Natur nicht erfüllt, sie bezeichnet lediglich denjenigen Grenzfall, in dem das Absättigungsphänomen schon bei Anwesenheit einer kleinen Zahl von Teilchen deutlich hervortritt. Bei negativem J besteht dann offenbar die günstigste Anordnung eines Neutrons und eines Protons darin, daß beide dieselbe Eigenfunktion φ_0 erhalten; die Gesamteigenfunktion $\psi = \varphi_0(p)\varphi_0(n)$ ist dann symmetrisch. Fügt man ein weiteres Proton hinzu, so hängt seine Wechselwirkung mit dem Neutron davon ab, ob der Ansatz I oder II der richtige ist. Da die Eigenfunktion, die das zweite Proton wegen des Pauliprinzips erhält, auf der des ersten orthogonal sein muß:

$$\sum_{\varrho} \int \varphi_0^*(\mathfrak{r}\varrho)\, \varphi_1(\mathfrak{r}\varrho)\, d\mathfrak{r} = 0\,, \tag{14.15}$$

so verschwindet bei hinreichend langsam variierendem Potential im Falle des Ansatzes I die Wechselwirkungsenergie des zweiten Protons mit dem Neutron

$$\overline{E}_{p_2 n} = \sum_{\varrho_p \varrho_n} \int\int \varphi_1^*(\mathfrak{r}_p \varrho_p)\, \varphi_0^*(\mathfrak{r}_n \varrho_n)\, J(\mathfrak{r}_p - \mathfrak{r}_n)\, \varphi_1(\mathfrak{r}_n \varrho_n)\, \varphi_0(\mathfrak{r}_p \varrho_p)\, d\mathfrak{r}_p\, d\mathfrak{r}_n \tag{14.16}$$

bei der Integration über $\mathfrak{r}_p$ und Summation über ϱ_p. In dieser Näherung wird jedes Neutron also nur von einem Proton angezogen und umgekehrt; die potentielle Energie ist ungefähr proportional zur Teilchenzahl. Gilt der Ansatz II, so kommt es nur auf die Symmetrie von ψ hinsichtlich der Ortskoordinaten an; da das Pauliprinzip erlaubt, zwei Teilchen, die sich nur in den Spinrichtungen unterscheiden, dieselbe Ortseigenfunktion zuzuschreiben, kann jedes Neutron dann von zwei Protonen merklich angezogen werden; es entstehen, solange keine weiteren Entartungen vorliegen, Zweierschalen. MAJORANA (68) hat zuerst darauf hingewiesen, daß aus der beobachteten Absättigung der Kernkräfte auf das negative Zeichen von J und aus der Auszeichnung gerader Teilchenzahlen, insbesondere der großen Stabilität des α-Teilchens, auf die Richtigkeit des Ansatzes II zu schließen ist. Natürlich wären auch Linearkombinationen von I und II mit Überwiegen von II denkbar.

Im Grenzfall großer Teilchendichten ist das Absättigungsphänomen unabhängig von unserer Annahme, daß J langsam veränderlich sei. Die gesamte potentielle Energie ist dann (strenge Ableitung im Anhang), wenn wir gleich den Ansatz II zugrunde legen,

$$E_{\text{pot}} = \sum_{i=1}^{Z} \sum_{k=1}^{N} \sum_{\varrho_i \varrho_k} \int\int \psi_i^*(\mathfrak{r}_1\varrho_1)\psi_k^*(\mathfrak{r}_2\varrho_2) J(\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2)\psi_i(\mathfrak{r}_2\varrho_1)\psi_k(\mathfrak{r}_1\varrho_2)\,d\mathfrak{r}_1 d\mathfrak{r}_2 . \quad (14.17)$$

Nimmt man an, daß die Spinkräfte klein sind und sich daher schreiben läßt

$$\psi_i(\mathfrak{r}\varrho) = \chi_i(\mathfrak{r})\,a_i(\varrho) \quad (14.18)$$

und führt zur Abkürzung die DIRACsche „gemischte Dichte" ein

$$\varrho(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2) = \sum_{\varrho_1\varrho_2} \sum_i \psi_i^*(\mathfrak{r}_1\varrho_1)\psi_i(\mathfrak{r}_2\varrho_2) = 2\sum_i \chi_i^*(\mathfrak{r}_1)\chi_i(\mathfrak{r}_2) , \quad (14.19)$$

wobei die $\sum_i$ über alle besetzten Zustände i zu erstrecken ist, so folgt

$$E_{\text{pot}} = \int\int \varrho_p(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2) J(\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2)\varrho_n(\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_1)\,d\mathfrak{r}_1 d\mathfrak{r}_2 . \quad (14.20)$$

Wenn nun die Zahl der Teilchen der einen Sorte, etwa der Neutronen, gegen Unendlich strebt, so wird die zugehörige Dichtematrix nach der Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{i=0}^{\infty} \chi_i^*(\mathfrak{r}_1)\chi_i(\mathfrak{r}_2) = \delta(\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2) \quad (14.21)$$

nahezu zweimal die δ-Funktion, und die Integration in (14.20) liefert, wenn man beachtet, daß $\varrho(\mathfrak{r}\mathfrak{r})$ die Dichte am Punkt $\mathfrak{r}$ ist,

$$E_{\text{pot}} = 2\int \varrho_p(\mathfrak{r}_1) J(0)\,d\mathfrak{r}_1 = 2ZJ(0) , \quad (14.22)$$

d. h. zweimal die Zahl der Protonen, multipliziert mit einer Konstanten (dem Wert des Potentials beim Abstand Null), wie es das Tröpfchenmodell verlangt.

Wir merken schließlich noch einen von ECKART (26) zuerst bewiesenen Satz an: In einem Austauschpotential ist die Bindungsenergie stets kleiner oder höchstens gleich der Bindungsenergie in einem gewöhnlichen Potential derselben Ortsabhängigkeit. Denn im günstigsten Fall, bei genau symmetrischer Eigenfunktion, sind beide Schrödingergleichungen identisch; ist die Eigenfunktion nicht rein symmetrisch, so treten im Austauschfall noch abstoßende Glieder hinzu.

§ 15. Theorie der leichtesten Kerne

Die vier leichtesten unter den zusammengesetzten Kernen: ${}^2_1D$ (Deuteron), ${}^3_1T$ (Triton), ${}^3_2He$ und ${}^4_2He$ (α-Teilchen) sind die einzigen, über deren Bindungsenergien bis jetzt genaue quantenmechanische Rechnungen angestellt worden sind. Ihre Massendefekte sind in der Tabelle am Schluß des Paragraphen angegeben. Die Bindungsenergien der beiden aus drei Teilchen bestehenden Kerne ${}^3_1T$ und ${}^3_2He$ sind nahezu gleich; der kleine Unterschied kann der Coulombschen Abstoßung der beiden Protonen im ${}^3_2He$ zugeschrieben werden. Die Energien der Kerne mit verschiedenen Teilchenzahlen stehen im Verhältnis $1:3{,}8:12{,}5$. Es ist die erste Aufgabe der Theorie, dieses außerordentlich rasche Anwachsen der Bindung mit wachsender Teilchenzahl zu erklären, das von dem Verhalten der schwereren Kerne völlig abweicht.

Wir bemerken zunächst, daß bei diesen Kernen, die nicht mehr als zwei Neutronen und zwei Protonen enthalten, nach dem Kraftansatz von MAJORANA noch keine Absättigung zu erwarten ist. Das bedeutet, daß die mittlere potentielle Energie der Wechselwirkung zwischen einem Proton und einem Neutron (soweit man ihr überhaupt eine vom Vorhandensein anderer Teilchen unabhängige Bedeutung zuschreiben kann) im Deuteron einmal, im Triton zweimal und im α-Teilchen viermal auftritt. WIGNER (100) hat nun gezeigt, daß bei Berücksichtigung der kinetischen Energien hieraus eine Erklärung des raschen Anwachsens der Massendefekte folgt. Es ist nämlich möglich, daß schon im Deuteron eine sehr große potentielle Energie zwischen Proton und Neutron herrscht, die aber von den kinetischen Nullpunktsenergien der beiden Teilchen wieder nahezu kompensiert wird. Da die kinetische Nullpunktsenergie eines Kernes als die Summe der kinetischen Energien der einzelnen Teilchen nur

ungefähr proportional zur Teilchenzahl anwächst, wird die potentielle Energie sie dann für die schwereren Kerne überwiegen und die Bindungsenergie, als kleine Differenz der beiden Größen, wird prozentual sehr stark anwachsen. Außerdem hängen die beiden Energien vom mittleren Abstand $\bar{r}$ der Teilchen im Kern ab. Die kinetische Energie nimmt nach der Unbestimmtheitsrelation (vgl. § 5) wie $1/\bar{r}^2$ zu. Wenn nun die potentielle Energie zwischen Proton und Neutron bei dem gegenseitigen Abstand, in dem die beiden Teilchen sich im Mittel im Kern befinden, stärker mit abnehmendem Abstand anwächst, so kann man durch das Zusammenrücken, das mit der Verstärkung der Bindung bei Vermehrung der Teilchenzahl verbunden ist, weitere Energie gewinnen. Das Argument ist genau dasselbe, das wir in § 11 zur Erklärung der ausgeprägten Auszeichnung gerader Teilchenzahlen verwendet haben. Die folgenden Rechnungen sind die direkte mathematische Ausarbeitung dieses Gedankens.

Um die Rechnung durchführen zu können, brauchen wir einen quantitativen Ansatz für die Kräfte zwischen den Teilchen. Es ist am zweckmäßigsten, einen einfachen Funktionstyp zu wählen, in dem noch einige unbestimmte Parameter enthalten sind, und zu versuchen, ob diese sich so wählen lassen, daß die Erfahrung korrekt dargestellt wird. Bisher sind die folgenden beiden Grenzfälle untersucht worden: *A.* Nur die Kraft zwischen Proton und Neutron ist von Null verschieden. Nach den obigen Überlegungen ist zu erwarten, daß sie mit wachsendem Abstand der Teilchen sehr rasch abfällt. Als zweckmäßigste Form des Potentials hat sich die Fehlerfunktion erwiesen:

$$J(\mathfrak{r}_p \mathfrak{r}_n) = -a e^{-b^2 r_{pn}^2}. \tag{15.1}$$

Sie enthält die beiden Parameter a (Tiefe des Potentials) und b (reziproke Abfallsbreite). Die Forderung, der Massendefekt eines vorgegebenen Kernes solle richtig aus (15.1) folgen, liefert eine Bedingung zwischen a und b; es ist die Frage, ob es ein Wertepaar a, b gibt, das die drei aus den Massendefekten von ${}^2_1\mathrm{D}$, ${}^3_1\mathrm{T}$ und ${}^4_2\mathrm{He}$ folgenden Bedingungen gleichzeitig befriedigt. *B.* Auch zwischen gleichen Teilchen herrscht eine beträchtliche Kraft. Das stärkste unmittelbare Argument hierfür liefern die Stoßversuche von Protonen an Protonen (96, vgl. S. 147), die durch das Coulombgesetz nicht erklärt werden können. Aus Symmetriegründen (vgl. § 6) setzt man zwischen Neutron und Neutron dieselbe Kraft an wie zwischen Proton und Proton, und zwar wurde in den bisherigen Rechnungen aus Gründen der Einfachheit das Potential

$$K(\mathfrak{r}_p \mathfrak{r}_p) = K(\mathfrak{r}_n \mathfrak{r}_n) = -c e^{-b^2 r^2} \tag{15.2}$$

angenommen, das sich von (15.1) nur im Absolutwert, aber nicht in der Abfallsbreite unterscheiden soll. Ob auch diese Kraft Austauschcharakter hat, ist für den Grundzustand der vier leichteren Kerne, dessen Eigenfunktion noch in den Koordinaten gleichartiger Teilchen symmetrisch gewählt werden kann, gleichgültig. Da die Annahme B drei Parameter freiläßt, wird sie eine Darstellung der drei empirischen Massendefekte jedenfalls gestatten. Wir erläutern zunächst den Gang der Rechnung im allgemeinen und diskutieren dann die Konsequenzen der beiden Annahmen.

Die strengen Lösungen der Schrödingergleichung für die Potentiale (15.1) und (15.2) lassen sich nicht mehr analytisch angeben. Als zweckmäßigste Rechenmethode erscheint das Ritzsche Variationsverfahren: Mit der Lösung der Schrödingergleichung äquivalent ist die Lösung der Variationsaufgabe, die gesamte Energie des Systems von A Teilchen

$$E=\int \Psi^*(\mathfrak{r}_1\ldots\mathfrak{r}_A)\left\{\sum_{i=1}^{A}\left[-\frac{\hbar^2}{2m_i}(\mathrm{grad}_i)^2\right]+V(\mathfrak{r}_1\ldots\mathfrak{r}_A)\right\}\Psi(\mathfrak{r}_1\ldots\mathfrak{r}_A)\,d\mathfrak{r}_1\ldots d\mathfrak{r}_A, \tag{15.3}$$

solle unter der Nebenbedingung

$$\int \Psi^*(\mathfrak{r}_1\ldots\mathfrak{r}_A)\Psi(\mathfrak{r}_1\ldots\mathfrak{r}_A)\,d\mathfrak{r}_1\ldots d\mathfrak{r}_A=1 \tag{15.4}$$

zum Minimum gemacht werden. In der geschweiften Klammer von (15.3) ist das erste Glied die Summe der kinetischen Energien der Teilchen und das zweite ihre gegenseitige potentielle Energie, in unserem Fall also die Summe der durch (15.1) und (15.2) gegebenen Wechselwirkungspotentiale. Man setzt nun für Ψ einfache Funktionen ein, die einige freie Parameter enthalten, und bestimmt die Parameterwerte so, daß (15.4) gilt und (15.3) so klein als möglich wird. Wie gut die erhaltenen Resultate mit der strengen Lösung übereinstimmen, hängt davon ab, wie glücklich man den Ansatz für Ψ gewählt hat.

Wir führen zunächst die Elimination der Schwerpunktskoordinaten durch. Setzt man zur Vereinfachung die Masse des Protons und Neutrons gleich und führt ein

$$\mathfrak{r}_s=\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{A}\mathfrak{r}_i\,;\quad \mathfrak{r}_{1i}=\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_i\quad (i=2,3\ldots A), \tag{15.5}$$

so folgt

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1}&=\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x_s}+\sum_{i=2}^{A}\frac{\partial}{\partial x_{1i}}\\ \frac{\partial}{\partial x_i}&=\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x_s}-\frac{\partial}{\partial x_{1i}}\end{aligned}\right\} \tag{15.6}$$

und somit statt (15.3)

$$E=\int \Psi^*\left\{-\frac{\hbar^2}{2M}\left[\frac{1}{A}(\mathrm{grad}_s)^2+2\sum_{i,k=2}^{A}\mathrm{grad}_i\,\mathrm{grad}_k\right]+V\right\}\Psi\,d\mathfrak{r}_s\,d\mathfrak{r}_{12}\ldots d\mathfrak{r}_{1A}. \tag{15.7}$$

In der geschweiften Klammer hängt nunmehr das erste Glied nur von $\mathfrak{r}_s$, das zweite und dritte nur von den $\mathfrak{r}_{1i}$ ab, und man erhält, wenn man Ψ in der Form

$$\Psi = \Psi_s(\mathfrak{r}_s) \cdot \Psi_R(\mathfrak{r}_{12} \ldots \mathfrak{r}_{1A}) \tag{15.8}$$

ansetzt und Ψ_s und Ψ_R jeweils für sich als normiert annimmt, die beiden getrennten Bedingungen

$$E_s = \int \Psi_s^* \left\{ -\frac{\hbar^2}{2AM} (\mathrm{grad}_s)^2 \right\} \Psi_s d\mathfrak{r}_s = \text{Minimum}, \tag{15.9}$$

$$E_R = \int \Psi_R^* \left\{ -\frac{\hbar^2}{M} \sum_{i,k=2}^{A} \mathrm{grad}_i \, \mathrm{grad}_k + V \right\} \Psi_R d\mathfrak{r}_{12} \ldots d\mathfrak{r}_{1A} = \text{Minimum}. \tag{15.10}$$

(15.9) führt zur Wellengleichung eines freien Teilchens der Masse AM, (15.10) liefert den Eigenwert E_R, den Energieinhalt des Kerns.

Wir geben nun diejenigen Formen für Ψ_R an, die sich bis jetzt als die vorteilhaftesten zur Berechnung der Konstanten des Kraftgesetzes erwiesen haben:

Deuteron:
$$\psi_{\mathrm{D}} = A e^{-\alpha r_{13}^2}. \tag{15.11}$$

Triton:
$$\psi_{\mathrm{T}} = B \left[e^{-\gamma^2 (r_{13}^2 + r_{23}^2)} + \delta e^{-\beta^2 \gamma^2 r_{12}^2} \left(e^{-\gamma^2 r_{13}^2} + e^{-\gamma^2 r_{23}^2} \right) \right]. \tag{15.12}$$

α-Teilchen:
$$\psi_\alpha = C e^{-\varepsilon (r_{13}^2 + r_{14}^2 + r_{23}^2 + r_{24}^2) - \zeta (r_{12}^2 + r_{34}^2)}. \tag{15.13}$$

Dabei ist r_{ik} der Abstand des i-ten vom k-ten Teilchen, und zwar bezeichnen die Indizes 1 und 2 die Neutronen, 3 und 4 die Protonen. Die Parameter α bis ζ werden aus der Minimalbedingung bestimmt (vgl. die Tabelle am Schluß des Paragraphen); für die Normierungsfaktoren A, B, C folgt durch Ausrechnung von (15.4)

$$A^2 = \left(\frac{2\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \tag{15.14}$$

$$B^2 = \frac{\gamma^6}{\pi^3} \left[\frac{1}{8} + \frac{4\delta}{(2 + 3\beta^2)^{3/2}} + \frac{\delta^2}{4\beta^3} + \frac{2\delta^2}{(1 + 4\beta^2)^{3/2}} \right]^{-1} \tag{15.15}$$

$$C^2 = \frac{2^{15/2} \varepsilon^{3/2} (\varepsilon + \zeta)^3}{\pi^{9/2}}. \tag{15.16}$$

Wir diskutieren die Lösung nur für den einfachsten Fall, das Deuteron, im einzelnen. Der Verlauf der Rechnung mit der Eigenfunktion (15.11) ist sehr einfach. Die kinetische bzw. potentielle Energie ist nach (15.10) für $A = 2$

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{\hbar^2}{M} \int (\mathrm{grad}\, \psi_{\mathrm{D}})^2 d\mathfrak{r} = 3 \frac{\hbar^2 \alpha}{M} \tag{15.17}$$

$$E_{\mathrm{pot}} = -a \int e^{-b r^2} \psi_{\mathrm{D}}^2 d\mathfrak{r} = -a \left(\frac{2\alpha}{2\alpha + b^2} \right)^{3/2}. \tag{15.18}$$

Die Bedingung $E =$ Minimum lautet

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}) = 0 \tag{15.19}$$

Hieraus würde bei gegebenen a und b ein bestimmter Wert für α und nach (15.17 und 18) für E folgen. Wir kennen umgekehrt E aus der Erfahrung und damit α und erhalten aus (15.19) so die in Fig. 14 angegebene Beziehung zwischen a und b.

Um den Wert dieser Lösung zu kontrollieren, vergleichen wir sie mit der strengen Lösung, die sich für das Deuteron noch qualitativ diskutieren und numerisch angeben läßt. Die Wellengleichung lautet

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{M}\Delta_{13} + E - a e^{-b^2 r_{13}^2} P(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_3)\right\} \psi_D(\mathfrak{r}_{13}) = 0 . \tag{15.20}$$

$P(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_3)$ führt $\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_3$ in $\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_1$, d. h. $\mathfrak{r}_{13}$ in $-\mathfrak{r}_{13}$ über. Man beweist in bekannter Weise, daß ψ_D entweder symmetrisch oder antisymmetrisch bei Verwandlung von $\mathfrak{r}_{13}$ in $-\mathfrak{r}_{13}$ sein muß: Bei dieser Operation geht der auf ψ_D wirkende Operator [auch $P(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_3)$ nach seiner Definition (14.1)] in sich über; also muß $\psi_D(-\mathfrak{r}_{13})$ eine Lösung derselben Gleichung sein wie $\psi_D(\mathfrak{r}_{13})$ und kann somit von $\psi_D(\mathfrak{r}_{13})$ höchstens um den Faktor -1 verschieden sein. Der Austauschoperator bewirkt, daß nur die symmetrischen Eigenfunktionen Anziehung der beiden Teilchen ergeben; von dieser Bestimmung des Vorzeichens der potentiellen Energie abgesehen, bringt er hier keinen Unterschied gegen den Fall der gewöhnlichen Kraft hervor. Wir interessieren uns nun speziell für den Grundzustand des Deuterons. Wir dürfen annehmen, daß er zum Drehimpuls Null gehört, d. h. daß ψ_D nur vom Abstand $|\mathfrak{r}_{13}| = r$ abhängt. Setzen wir

$$\psi_D = \frac{1}{r} u(r) , \tag{15.21}$$

so nimmt (15.20) die einfache Form an:

$$\left\{\frac{\hbar^2}{M}\frac{\partial^2}{\partial r^2} - E + a e^{-b^2 r^2}\right\} u = 0 . \tag{15.22}$$

Man erkennt sofort, daß (15.11) von der strengen Lösung von (15.22) abweicht. Diese wird zwar wie die Fehlerfunktion (15.11) bei $r = 0$ einen endlichen Wert und verschwindende Ableitung haben (da ja $\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}$ stetig sein muß), aber bei großen r, für die das Potential zu Null abgeklungen ist, muß sie, wie man leicht erkennt, die Form

$$\psi\left(r \gg \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{r} e^{-\alpha r} \tag{15.23}$$

haben, wobei α mit dem Eigenwert E durch

$$\alpha = \frac{\sqrt{ME}}{\hbar} \tag{15.24}$$

verbunden ist. Wie groß der Fehler ist, den man bei der Ersetzung der strengen Lösung durch (15.11) begeht, lehrt ein Vergleich der aus den beiden Lösungen folgenden Beziehungen zwischen a und b (Tabelle 4).

Tabelle 4. Beziehung zwischen a und b

b	a (streng)	a (nach 15.11)
1,52	94	109
1,78	129	156
2,12	161	203
2,56	214	270

Man erkennt, daß (15.11) um so mehr von der Wirklichkeit abweicht, je größer b, d. h. je kleiner die Reichweite der Kräfte ist. Die strenge Lösung ist nur numerisch bekannt; man könnte aber natürlich analytische Ausdrücke angeben, die sie wesentlich besser als (15.11) darstellen. Für die Bestimmung von a und b würde dadurch aber nichts gewonnen. Denn eine Verbesserung der Eigenfunktionen des Tritons und des α-Teilchens, die diese auf denselben Genauigkeitsgrad brächte, dürfte in einfacher Weise nicht möglich sein; da sich aber im a-b-Diagramm (Fig. 14) die drei Kurven, welche die Bedingungen zwischen a und b darstellen, unter ziemlich spitzem Winkel schneiden, erscheint es vorteilhafter, die Kurven aus Ansätzen zu ermitteln, deren Fehler prozentual etwa gleich groß sind, um eine zu große Verschiebung der Schnittpunkte durch die seitliche Verlagerung einer der Kurven zu vermeiden.

Für die beiden anderen Kerne verläuft die Rechnung nach demselben Schema wie für das Deuteron, nur muß die Energie als Funktion mehrerer Parameter gleichzeitig zum Minimum gemacht werden, und es treten kompliziertere Integrale auf (vgl. 11a, 25). Wir diskutieren nur qualitativ die Bedeutung der Eigenfunktionen (15.12) und (15.13). Eine zur Berechnung des Massendefekts des Tritons geeignete Eigenfunktion wurde zuerst von FEENBERG (29) eingeführt; unser ψ_T ist eine von DOLCH (25) angegebene Erweiterung dieses Ansatzes. Ihre spezielle Form wurde gewählt, um die beiden Grenzfälle bequem darstellen zu können, daß entweder die drei Teilchen ungefähr gleiche Abstände voneinander haben, oder ein Neutron sich sehr nahe beim Proton befindet, während das zweite in größerem Abstand locker gebunden ist. Der erste Fall tritt

ein, wenn β und δ etwa gleich eins sind. Im zweiten Fall muß die Eigenfunktion nahezu gleich der Eigenfunktion eines Deuterons, aber mit wesentlich kleiner Abfallsbreite sein, multipliziert mit der langsam nach außen abklingenden Wahrscheinlichkeitsamplitude für die Anwesenheit des zweiten Neutrons. Dies gilt, wenn β klein ist. Z. B. ist bei einer Konstellation, in der r_{23} groß ist, $\delta e^{-\beta^2\gamma^2 r_{12}^2 - \gamma^2 r_{13}^2}$ das größte Glied in ψ_T, und dieses Glied ist von der Form $e^{-\beta^2\gamma^2 r_{12}^2}\psi_D(r_{13})$. Man erkennt aus diesen Betrachtungen übrigens, daß ψ_T trotz seines komplizierteren Aussehens vermutlich keine bessere Approximation an die Wirklichkeit ist als ψ_D für das Deuteron, da diese Funktion selbst als Bestandteil in ψ_T eingeht. Die größere Zahl unabhängiger Parameter wird durch die größere Zahl möglicher Teilchenkonstellationen bedingt. Das α-Teilchen dagegen stellt wegen der Symmetrie zwischen Protonen und Neutronen, durch die es ausgezeichnet ist, wieder ein einfacheres Problem dar. Unsere Funktion ψ_α hat schon WIGNER (100) angegeben. Sie ist hinsichtlich aller Proton-Neutronabstände einerseits und beider Abstände zwischen gleichen Teilchen andererseits symmetrisch.

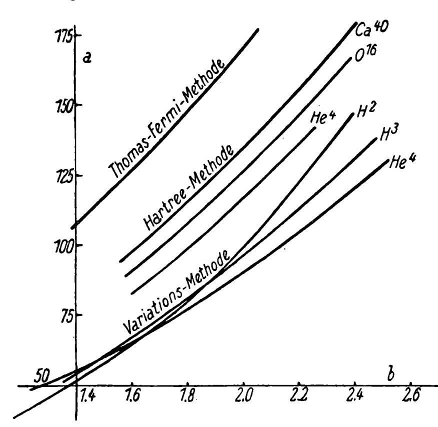


Fig. 14. Beziehungen zwischen den Konstanten des Austauschpotentials $J(r) = a e^{-b^2 r^2}$. Einheit für a: $^1/_{1000}$ M.E., für b: mc^2/e^2.

Die Ergebnisse der Rechnung ohne Kräfte zwischen gleichen Teilchen (Fall A) sind in Fig. 14 und Tabelle 5 nach DOLCH zusammengestellt. Dabei liegt nach einer Verbesserung der Rechnung die Kurve für das Triton noch um so viel tiefer, daß sie genau durch den Schnittpunkt der beiden anderen Kurven geht. In Anbetracht der Ungenauigkeit der Methode muß diese gute Übereinstimmung als Zufall betrachtet werden. Immerhin scheint es möglich, die drei Massendefekte durch ein bestimmtes Wertepaar a, b befriedigend darzustellen. In der Tabelle sind außer den Energiewerten auch die Kernradien angegeben. Sie sind definiert als die Wurzel aus dem mittleren Abstandsquadrat eines Neutrons von einem Proton. Sie nehmen von ${}^3_1\mathrm{T}$ zu ${}^4_2\mathrm{He}$ wieder ab. Dieser dem Verhalten der „Kernflüssigkeit“ bei schwereren Kernen entgegengesetzte Effekt erklärt sich nach der Unbestimmtheitsrelation aus dem außerordentlich raschen Anwachsen der Bindungsenergie.

Während der Ansatz A, der den Vorteil der größten Einfachheit bietet, somit zur Erklärung der vier Massendefekte auszureichen scheint, sprechen einige weitere experimentelle Daten für die Annahme von Kräften zwischen gleichen Teilchen. Die Streuversuche von Protonen an Protonen wurden schon erwähnt. Außerdem haben FEENBERG und KNIPP (30, vgl. § 29) darauf hingewiesen, daß eine Erklärung des großen Streuquerschnitts langsamer Neutronen an Protonen zur Annahme einer beträchtlichen Spinabhängigkeit der Austauschkraft (Linearkombination der Ansätze I und II von § 14) zwingen könnte. Danach wäre eine gute Übereinstimmung der Annahme A mit der Erfahrung schwerer zu erreichen. Man bekommt, wenn man, um den zu A entgegengesetzten Grenzfall zu studieren, c so groß wie möglich wählt, die Werte $a = 74mc^2$, $c = 26mc^2$, $b = 0{,}79mc^2/e^2$. Unter a ist hierbei der Faktor desjenigen Austauschpotentials verstanden, das im Deuterongrundzustand (d. h. bei parallelen Spins der beiden Teilchen) herrscht. Für das Triton und das α-Teilchen wäre dagegen a durch $\approx 0{,}9a$ zu ersetzen. Die so eingeführten Kräfte zwischen gleichen Teilchen können die Größenordnung der gemessenen Proton-Protonstreuung erklären. Man kann aber wohl keinen der bisher vorgeschlagenen Ansätze als endgültig ansehen. Sicher kann nur eine genaue Berücksichtigung der Spinabhängigkeit der Kräfte zur Vereinigung aller Erfahrungen führen. Soweit wir im folgenden quantitative Angaben über das Kraftgesetz verwenden, wollen wir uns auf die Ergebnisse des Ansatzes A als die einfachsten und qualitativ wohl ungefähr richtigen Daten beschränken.

Tabelle 5. Konstanten der leichtesten Kerne. (Nach DOLCH)
Einheiten: Energie $= mc^2$, Länge $= e^2/mc^2$

Kern	Massendefekt	Radius	Konstanten der Eigenfunktion
${}^2_1$D	4,0	0,406	$A^2 = 0{,}462$; $\sqrt{\alpha} = 0{,}97$
${}^3_1$T	15,8	0,541	$B^2 = 0{,}058$; $\beta = 0{,}80$; $\gamma = 1{,}13$; $\delta = 0{,}86$
${}^4_2$He	54,0	0,463	$C^2 = 3{,}7$; $\sqrt{\varepsilon} = 0{,}91$; $\sqrt{\zeta} = 0{,}691$

Konstanten des Kraftgesetzes: $a = 122$, $b = 1{,}61$

§ 16. Statistische Methode für schwere Kerne

Der Bau eines schweren Kerns wird, als Vielkörperproblem, niemals streng durchgerechnet werden können. Dagegen bieten sich zwei Näherungsmethoden dar, die den beiden phänomenologischen Modellen entsprechen: Man kann entweder versuchen, nach einer statistischen Methode, die über die individuellen Eigenschaften der Kerne mittelt, die

charakteristischen Konstanten der „Kernflüssigkeit“ zu berechnen, oder durch Lösung der Schrödingergleichung einzelner Teilchen im mittleren Feld der übrigen ein quantitativ begründetes Schalenmodell aufzubauen. Über die vorliegenden Ansätze in der Richtung des ersten Verfahrens berichten wir in den folgenden beiden Paragraphen, um dann im § 18 die Anwendbarkeit des zweiten Verfahrens zu prüfen.

Wie in der Theorie der leichtesten Kerne erhebt sich die Frage nach dem richtigen Ansatz für die Kräfte. Nehmen wir nur Kräfte zwischen Neutron und Proton an, so können wir versuchen, das dort gefundene Kraftgesetz einfach zu übernehmen. Wollen wir dagegen auch Kräfte zwischen gleichartigen Teilchen berücksichtigen, so müssen wir jetzt die dort offengelassene Frage entscheiden, ob auch diese Kräfte den Austauschcharakter haben sollen. Einerseits zwingt die empirische Tatsache der Absättigung dazu, anzunehmen, daß sie entweder Austauschkräfte sind, oder daß sie zu klein sind, um einen merklichen Beitrag zur Bindungsenergie zu liefern, da sonst ein zum Quadrat der Teilchenzahlen (etwa zu $Z^2 + N^2$) proportionaler Summand in den Massendefekten auftreten müßte. Andererseits liefert der Zusammenhang der Kernkräfte mit dem β-Zerfall, der die einzige theoretische Rechtfertigung für die Annahme von Austauschkräften darstellt, nur bei ganz spezieller Wahl des elementaren Kraftansatzes von FERMI den Austauschcharakter für die Kraft zwischen gleichen Teilchen (§ 41). Es liegt nahe, diese Kraft daher versuchsweise als klein anzusetzen; wir werden uns im folgenden dieser in den bisherigen Arbeiten gemachten Annahme anschließen. Für die Kraft zwischen Proton und Neutron wählen wir wieder den Ansatz (15.1), ohne zunächst über die Zahlwerte von a und b zu verfügen. Jedoch ist es möglich, daß die Ergebnisse der Proton-Protonstreuversuche eine Abänderung auch der Theorie der schweren Kerne im Sinne des Ansatzes B von § 15 erzwingen werden.

Die genau der Methode von THOMAS und FERMI für die Atomhülle nachgebildete statistische Methode für schwere Kerne wurde von MAJORANA (68) angegeben. Sie beruht auf zwei Vereinfachungen des quantenmechanischen Mehrkörperproblems. Die erste Vereinfachung besteht in dem Übergang zur HARTREEschen Näherung, d. h. zur Zerlegung der Gesamteigenfunktion Ψ in ein Produkt einzelner Eigenfunktionen $\psi_i(p_i)$, $\varphi_k(n_k)$, die nur von den (durch die Buchstaben p bzw. n zusammengefaßten) Orts- und Spinkoordinaten je eines Teilchens abhängen.

$$\Psi(p_1 \ldots p_Z, n_1 \ldots n_N) = \psi_1(p_1) \ldots \psi_Z(p_Z) \varphi_1(n_1) \ldots \varphi_N(n_N)\,. \quad (16.1)$$

Hierin liegt eine bestimmte physikalische Modellvorstellung: es ist angenommen, daß die Kraftwirkung, die auf ein herausgegriffenes Teilchen von allen übrigen ausgeübt wird, durch ein mittleres ausgeschmiertes Feld ersetzt werden darf, d. h. daß die Bewegung des Teilchens unabhängig von der augenblicklichen Lage der anderen Teilchen nur durch ihre mittlere Lage gegeben ist; denn nur dann kann seine Eigenfunktion nur von seinen Absolutkoordinaten (physikalisch gesprochen, von seiner Lage relativ zum Systemschwerpunkt) und nicht von den Relativkoordinaten abhängen. Über die Gültigkeitsgrenzen dieser Vorstellung vgl. § 17.

Die zweite Vereinfachung besteht in der Annahme eines ganz bestimmten einfachen Typus für die Eigenfunktionen. Man teilt das Gesamtvolumen des Kerns ein in kleine Teilvolumina, in denen Potential und Dichte jeweils praktisch als konstant angesehen werden dürfen, und ersetzt die wirklichen Eigenfunktionen in jedem der Teilvolumina durch ebene Wellen (vgl. Fig. 15). Das Pauliprinzip fordert nun, daß nur je zwei Teilchen dieselbe räumliche Eigenfunktion haben; ferner müssen die Eigenfunktionen der höheren Zustände orthogonal auf denen der niederen stehen. Während an sich die Ersetzung der Eigenfunktionen durch ebene Wellen in einem hinreichend kleinen Teilvolumen stets erlaubt ist, besteht der vereinfachte Ansatz der Thomas-Fermi-Methode nun in der Annahme, daß in jedem Teilvolumen doch mehrere Wellenlängen der höheren Eigenfunktionen Platz haben. Dann ist es nämlich möglich, die Orthogonalitätsbedingung

$$\int \psi_i^* \psi_k d\mathfrak{r} = \delta_{ik} \tag{16.2}$$

in jedem Teilvolumen für sich zu befriedigen, indem man einfach, wie in einem Gas freier Teilchen, fordert, daß jeder Zustand das Phasenvolumen h^3 hat, d. h. wenn die Eigenfunktionen im Volumen V auf eins normiert sind, daß die Impulse zweier aufeinander folgender Zustände sich um je $h/V^{1/3}$ unterscheiden. Diese Bedingung würde die Orthogonalität streng gewährleisten, wenn das Teilvolumen gleich dem Normierungsvolumen V wäre; über die Gültigkeit dieser Voraussetzung s. Gl. (16.5).

Indem wir für die Eigenfunktion also schreiben

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{\frac{i}{\hbar}(\mathfrak{p}\mathfrak{r})}, \tag{16.3}$$

erhalten wir für die Teilchendichte

$$\varrho = 2\sum_i \psi_i^* \psi_i = 2\int_0^P \frac{d\mathfrak{p}\, V}{h^3} \psi^* \psi = \frac{8\pi}{3h^3} P^3. \tag{16.4}$$

Die Summation über die stationären Zustände dürfen wir durch eine Integration über ihre Impulse ersetzen, wenn das betrachtete System viele Teilchen enthält; diese Voraussetzung ist ohnehin notwendig, wenn die Annahme über die Anwesenheit von Eigenfunktionen mit mehreren Wellenlängen in einem Teilvolumen konstanter Dichte erfüllbar sein soll. Der Maximalimpuls P bedeutet den höchsten Impuls, den nach der FERMI-Statistik Materie der Dichte ϱ annehmen muß; er kann also nach (16.4) als Maß der Dichte verwendet werden. Der Faktor V/h^3 garantiert die richtige Erfüllung des Phasenraums; der Faktor 2 rührt davon her, daß wegen des Spins jeder Zustand doppelt besetzt werden kann. Das Normierungsvolumen V fällt aus den Gleichungen heraus, seine Berechnung ist nur für eine Beurteilung der Genauigkeit der Methode wichtig. Da wir die Methode als Näherungslösung des HARTREE-Problems auffassen, müssen wir ihm, wenn n Teilchen im ganzen vorhanden sind, den Wert

$$V = \frac{n}{\varrho} \tag{16.5}$$

geben, damit im ganzen Normierungsvolumen gerade die n Teilchen zur Dichte beitragen. Für n ist im Kern Z bzw. N einzusetzen. Das Normierungsvolumen ist also an Stellen mittlerer Dichte von der Größenordnung des Kernvolumens, und man erkennt, daß die Teilvolumina nur dann so groß gewählt werden können, wie die Gültigkeitsbedingung der Methode es erfordert, wenn die Dichte im ganzen System praktisch konstant ist. Dies ist nun, wie wir sehen werden, gerade im Kern in sehr viel höherem Maß der Fall als in der Atomhülle.

Der Vorteil des Ansatzes (16.3) für die Eigenfunktion ist nun, daß er erlaubt, auch die Energie als Funktion von P und damit von ϱ auszudrücken und so ohne den Umweg über die Eigenfunktionen das Minimalproblem durch Wahl einer geeigneten Dichteverteilung zu lösen. Die Dichte der kinetischen Energie ist

$$E_{\text{kin}} = 2\int_0^P \frac{d\mathfrak{p}\, V}{h^3}\, \frac{\hbar^2}{2M}\, |\text{grad}\, \psi|^2 = \frac{4\pi}{5}\, \frac{P^5}{M h^3}. \tag{16.6}$$

Setzt man P aus (16.4) ein, so ergibt sich für die gesamte kinetische Energie

$$\overline{E}_{\text{kin}} = \frac{4\pi h^2}{5M}\int\left(\frac{3\,\varrho}{8\pi}\right)^{5/3} d\mathfrak{r}, \tag{16.7}$$

wobei für ϱ die Dichteverteilung der gerade betrachteten Teilchensorte einzusetzen ist. Die potentielle Energie ist durch (14.20) gegeben. Um die gemischten Dichten aus den Eigenfunktionen (16.3) zu berechnen,

benutzen wir nochmals eine Annäherung. Wir haben gesehen, daß im Grenzfall großer Dichten die potentielle Energie die Form (14.22) annimmt. Sie ist dann also ein einfaches Volumenintegral über eine Funktion der gewöhnlichen Dichte $\varrho(\mathfrak{r})$, die man als die Dichte der potentiellen Energie am Punkt $\mathfrak{r}$ deuten kann. D. h. in diesem Grenzfall ist die Energiedichte an jedem Punkt völlig unabhängig von der Dichteverteilung in seiner Umgebung und hängt nur von der Teilchendichte an diesem Punkt selbst ab. Dadurch ist kein Punkt im Kern energetisch vor dem andern ausgezeichnet, und es wird sich daher überall dieselbe Dichte einstellen — diejenige, die zur tiefsten Gesamtenergie führt. Man beweist dies auch formelmäßig leicht durch Lösung des Variationsproblems $E = \text{Min.}$ Da die Dichte im Kerninnern in dieser Näherung konstant ist, ist es (außer an Punkten nahe der Oberfläche) auch das Potential auf ein einzelnes Teilchen, und daher erweisen sich die ebenen Wellen in der Tat als die korrekten Lösungen des HARTREE-Problems. Wir wollen nun über (14.22) hinausgehen, indem wir nicht annehmen, daß die gemischte Dichte der Neutronen die δ-Funktion von $\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'$ sei, sondern sie exakt berechnen in der Näherung, in der die Dichte als konstant angenommen werden darf. Es ergibt sich nach (16.3)

$$\varrho(\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2) = \frac{2}{h^3} \int_0^P e^{\frac{i}{\hbar} \mathfrak{p}(\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2)} d\mathfrak{p}, \tag{16.8}$$

wobei P etwa an der Stelle $\mathfrak{r} = \frac{1}{2}(\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2)$ genommen werden soll. Für die potentielle Energie erhält man so

$$E_{\text{pot}} = \int d\mathfrak{r} f[\varrho_P(\mathfrak{r}), \varrho_n(\mathfrak{r})], \tag{16.9}$$

wobei die Funktion f nach (14.20) und (16.8) aus J berechnet werden kann. Sie ist für verschiedene J von HEISENBERG (52) und WANG (92) angegeben worden.

Auch (16.9) ergibt die konstante Dichte im Kern. Setzen wir

$$\varrho_P = \frac{Z}{V}; \qquad \varrho_n = \frac{N}{V} \tag{16.10, 11}$$

(V bedeutet jetzt das Kernvolumen), so folgt

$$E = \frac{h^2}{M} \frac{4\pi}{5} \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{5/3} (Z^{5/3} + N^{5/3})\, V^{-2/3} - V f\left(\frac{Z}{V}, \frac{N}{V}\right), \tag{16.12}$$

und die Forderung $E = \text{Min.}$, d. h. $\partial E / \partial V = 0$ liefert

$$-\frac{h^2}{M} \frac{8\pi}{15} \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{5/3} \left[\left(\frac{Z}{V}\right)^{5/3} + \left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}\right] - f\left(\frac{Z}{V}, \frac{N}{V}\right) + \frac{Z}{V} \frac{\partial f}{\partial \varrho_P} + \frac{N}{V} \frac{\partial f}{\partial \varrho_n} = 0 \tag{16.13}$$

als Bestimmungsgleichung für das Kernvolumen. Da die bei der Ableitung von (16.8) gemachte Voraussetzung, die Konstanz der Dichte, nur an der Oberfläche des Kerns versagt, wäre die Rechnung mit dem Ansatz (16.3) für einen unendlich großen Kern sogar die strenge Lösung des HARTREE-Problems; denn sie hätte dann in Strenge die charakteristische Eigenschaft dieser Lösung: daß die verwendeten Wellenfunktionen Eigenlösungen desjenigen Potentials sind, das sie selbst erzeugen. Den Einfluß der Oberflächeneffekte berücksichtigen wir in § 17.

Die Gleichungen (16.13) und (16.12) gestatten, die Dichte und den Massendefekt jedes Kerns als Funktion der Konstanten a und b des Kraftgesetzes auszurechnen. Bei gegebenem Verhältnis Z/N variiert nach (16.13) das Volumen, und daher nach (16.12) auch die Energie proportional zur Teilchenzahl $Z+N$. Wir haben hier also gerade die Volumenenergie der Kernflüssigkeit bestimmt. Die Oberflächenspannung ist in den vernachlässigten Randeffekten enthalten. Dagegen kann die Coulombsche Abstoßungsenergie der Protonen ohne weiteres mitberücksichtigt werden. Nach der Formel (I.14) des Anhangs lautet sie

$$E_C = \frac{e^2}{2}\int\int\frac{d\mathfrak{r}\,d\mathfrak{r}'}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|}\left(\varrho_P(\mathfrak{r})\varrho_P(\mathfrak{r}') - \frac{1}{2}\varrho_P^2(\mathfrak{r}\mathfrak{r}')\right). \tag{16.14}$$

Hierin bedeutet das erste Glied die normale Coulombsche Wechselwirkung der Ladungswolke $e\varrho_P(\mathfrak{r})$ mit sich selbst; das Zusatzglied rührt von der FERMI-Statistik der Protonen her. Durch die Hinzufügung des Doppelintegrals (16.14) zur Gesamtenergie würde die Konstanz der Dichte zerstört (man darf in ihm nicht von der Existenz einer Kernoberfläche absehen, da es für unendlich große Kerne divergiert). Es ist bequemer und bei nicht zu großem Einfluß der Coulombkraft zulässig, ϱ nicht so zu variieren, daß die Gesamtenergie ein Minimum wird, sondern nur nachträglich zur Energie des Kerns den Betrag (16.14) hinzuzufügen, wobei für ϱ der ohne Berücksichtigung der Coulombenergie berechnete Verlauf eingesetzt wird.

Die Berechnung der Kernenergien nach dieser Methode wurde von HEISENBERG (52), WICK (97) und NAKABAYASI (73) numerisch durchgeführt. Dabei ergab sich für verschiedene Typen des Kraftgesetzes übereinstimmend, daß die statistische Methode — da sie das Absättigungsphänomen liefert — eine einheitliche Darstellung der Massendefekte aller Kerne in einer gewissen Näherung ermöglicht, daß dafür aber ein wesentlich anderes Kraftgesetz notwendig ist als nach der Variationsmethode. Man braucht bei gegebenem Wert von b stets etwa doppelt so große a, d. h. eine doppelt so große potentielle Energie, um nach der statistischen

Methode die Bindungsenergien der schweren Kerne abzuleiten, als die Bindungsenergien der leichtesten Kerne nach der Variationsmethode von § 15 erfordern (vgl. Fig. 14, Kurve „Thomas-Fermi-Methode"). Dieser Unterschied muß an der Ungenauigkeit der statistischen Methode liegen. Denn da der Packungsanteil von ${}_2^4$He durchaus von der Größenordnung der Packungsanteile schwererer Kerne ist, müßte man bereits durch eine lockere VAN DER WAALSsche Bindung von He-Kernen aneinander schwere Kerne aufbauen können, die nahezu die richtigen Massendefekte haben. Damit ist ein Kernmodell angegeben, das schon mit den aus den leichtesten Kernen bestimmten a und b die richtigen Bindungsenergien liefert; der Ansatz (16.3) muß also eine sehr schlechte Annäherung an die wirkliche Lösung des Minimalproblems sein. Wir suchen ihn zunächst durch Berücksichtigung der Oberflächeneffekte zu verbessern und den übrigbleibenden Fehler wenigstens qualitativ verständlich zu machen.

§ 17. Erweiterungen der statistischen Methode für leichtere Kerne

Die Berechnung der Energiedichte nach der statistischen Methode von MAJORANA weicht in der Nähe der Kernoberfläche aus zwei Gründen von der Wirklichkeit ab. Einmal ist der Ausdruck (16.8) für die gemischte Dichte nicht mehr richtig, wenn einer der beiden Punkte außerhalb des Kerns liegt, und das hat zur Folge, daß die Formeln (16.9) und (16.10) für die potentielle Energie falsch werden für Punkte, deren Abstand vom Kernrand kleiner ist als die kleinere der beiden Abfallsbreiten, die durch die Abhängigkeit der gemischten Dichte und des Austauschpotentials vom Ort definiert sind, d. h. kleiner als $\hbar/P$ und als $1/b$. Zweitens ist aber an einem so steilen Dichteabfall (nach der Methode von § 16 müßte die Dichte am Kernrand unstetig von dem konstanten Wert im Kerninnern zum Wert Null übergehen, vgl. Fig. 16) auch die Berechnung der kinetischen Energie nach (16.7) falsch. Denn die Ersetzung der Eigenfunktion durch ebene Wellen versagt an der Übergangsstelle; die wirklichen Eigenfunktionen müssen dort sehr rasch abfallen und damit wird für eine kurze Strecke grad ψ außerordentlich groß. Beide Ursachen ergeben für hinreichend große Kerne ein zur Kernoberfläche proportionales positives Zusatzglied zur Energie. Das erste Glied ist genau analog zur Oberflächenspannung makroskopischer Flüssigkeiten, die ja auch davon herrührt, daß die Teilchen nahe der Oberfläche unter einer dem Absolutbetrag nach etwas kleineren potentiellen Energie stehen als die Teilchen im Innern der Flüssigkeit. Das zweite Glied ist die von der Unbestimmtheitsrelation

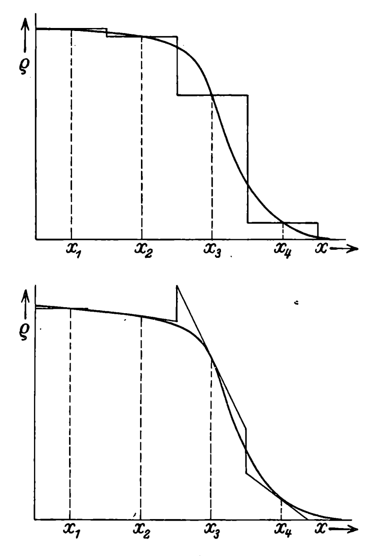


Fig. 15. Annäherung einer Dichteverteilung nach der normalen THOMAS-FERMI-Methode (oben; in jedem Teilvolumen wird eine mittlere konstante Dichte angenommen) und nach der Erweiterung durch den Ansatz (17.1) (unten; in jedem Teilvolumen wird auch die Dichteänderung linear approximiert).

geforderte kinetische Nullpunktsenergie, die von der relativ scharfen Lokalisierung des Kernrandes herstammt.

Man kann abschätzen, daß die „kinetische Oberflächenenergie" im allgemeinen bei den Kernen größer ist als die normale, potentielle. Sie kann durch eine Erweiterung der THOMAS-FERMI-Methode berücksichtigt werden (94). Man muß dazu statt (16.3) ansetzen

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}}\left[1 + (\mathfrak{a}\mathfrak{r})e^{\frac{i}{\hbar}(\mathfrak{p}\,\mathfrak{r})}\right]. \tag{17.1}$$

Der Vektor $\mathfrak{a}$ wird so bestimmt, daß die durch (17.1) dargestellte lineare Änderung der Eigenfunktionen gerade die mittlere Änderung der Dichte in dem betrachteten Teilvolumen richtig wiedergibt (vgl. Fig. 15); daraus folgt die Bedingung

$$\operatorname{grad} \varrho = \frac{4}{h^3}\int_0^P \mathfrak{a}(\mathfrak{p})\,d\mathfrak{p}. \tag{17.2}$$

Wählt man weiter die Funktion $\mathfrak{a}(\mathfrak{p})$ unter der Bedingung (17.2) so, daß die Energie ein Minimum wird, so ergibt sich $\mathfrak{a}$ unabhängig von $\mathfrak{p}$, und für die Dichte der kinetischen Energie folgt analog zu (16.6)

$$E_{\text{kin}} = \frac{4\pi h^2}{5M}\left(\frac{3\,\varrho}{8\pi}\right)^{5/3} + \frac{h^2}{32\pi^2 M}\,\frac{(\operatorname{grad}\varrho)^2}{\varrho}. \tag{17.3}$$

Wegen des Zusatzgliedes hängt die Energiedichte jetzt nicht mehr nur von der Teilchendichte an einem Punkt, sondern auch von ihrer räumlichen Änderung ab; damit wird die Gleichberechtigung aller Punkte aufgehoben, und es ergibt sich ein kontinuierlicher Abfall der Dichte am Kernrand. Die Breite der Oberflächenschicht stellt sich so ein, daß einerseits der Gradient der Dichte, der die „kinetische Oberflächenspannung" bewirkt, nicht zu groß wird, und andererseits die Dichte selbst in einem nicht zu großen Gebiet von demjenigen optimalen Wert abweicht, bei dem die potentielle Energie die kinetische Volumenenergie am meisten überwiegt.

Da diese Erweiterung der statistischen Methode zur Energie noch ein positives Glied hinzufügt, kann sie die Übereinstimmung mit der Theorie

der leichtesten Kerne nicht verbessern. Sie ist nur zur Abschätzung der Größe der Oberflächenspannung und der Breite der Oberfläche geeignet. Für ein Potential J, das den Verlauf der Massendefekte ungefähr richtig darstellt, folgen als Breite der Oberflächenschicht unabhängig vom Kernradius etwa $^2/_3$ Elektronenradien $\approx 2 \cdot 10^{-13}$ cm. Die Dichteverteilungen für einen schweren und einen leichten Kern nach diesem Ergebnis sind in Fig. 16 dargestellt [nach S. FLÜGGE (35)]. —

Die wichtigste Frage für die Ausarbeitung einer genaueren Theorie lautet: Beruht die Ungenauigkeit der statistischen Methode auf der physikalischen Vereinfachung des HARTREEschen Ansatzes (16.1), der die Einwirkung der einzelnen Teilchen aufeinander durch ein mittleres Gesamtpotential ersetzt oder auf der mathematischen Vereinfachung des Ansatzes (16.3), der die Eigenfunktionen als ebene Wellen darstellt. Wir haben gesehen, daß (16.3) für unendlich große Kerne keine Approximation, sondern die strenge Lösung des HARTREE-Problems ist. Seine exakte Lösung für leichte Kerne wäre dagegen nur durch langwierige numerische Rechnungen möglich. Jedoch hat HEISENBERG (53) nach der Variationsmethode des § 15 eine für leichte Kerne vermutlich schon recht gute Näherung angegeben. Da hier wegen des Pauliprinzips außer den Eigenfunktionen des Grundzustandes zu ihnen passende Eigenfunktionen der angeregten Zustände angegeben werden müssen, erscheint es bequemer, nicht für die Eigenfunktionen selbst, sondern für das Potential, in dem sie Lösungen der Wellengleichung sein sollen, einen einfachen Ansatz mit einem freien Parameter zu machen. HEISENBERG hat die Form einer Parabel gewählt. Dadurch kann das Verhalten des Potentials in der Nähe des Mittelpunkts der leichten Kerne, in denen kein Gebiet konstanter Dichte mehr existiert, in erster Näherung richtig dargestellt werden. Bei großen Abständen vom Kernmittelpunkt fallen die aus ihnen folgenden Eigenfunktionen allerdings, ebenso wie die in § 15 verwendeten, nicht wie eine Exponentialfunktion, sondern wie eine GAUSSsche Fehlerfunktion (also zu rasch) ab; da dort die Dichte bereits klein ist, ist dieser Fehler aber wohl von geringerer Bedeutung.

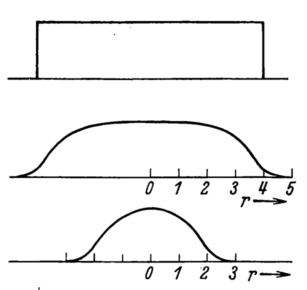


Fig. 16. Dichteverlauf für einen unendlich schweren Kern, für ^{200}Hg und für ^{16}O.

Den Protonen und Neutronen der leichteren Kerne sind also die Eigenfunktionen eines räumlichen harmonischen Oszillators zuzuschreiben.

Sie sind Produkte aus je drei Eigenfunktionen der den drei Raumrichtungen entsprechenden linearen Oszillatorpotentiale, deren Summe das Potential des räumlichen Oszillators ist. Diese lauten

$$\left.\begin{aligned} \psi_0 &= \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\frac{\alpha}{2}x^2} \\ \psi_1 &= \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\pi}}\, x\sqrt{2\alpha}\, e^{-\frac{\alpha}{2}x^2} \\ \psi_2 &= \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\pi}}\, \frac{4\alpha x^2 - 2}{2\sqrt{2}}\, e^{-\frac{\alpha}{2}x^2}. \end{aligned}\right\} \tag{17.4}$$

Die Konstante α hängt mit der Frequenz ν und der Masse M des Oszillators durch die Gleichung

$$\alpha = \frac{M}{\hbar} 2\pi\nu \tag{17.5}$$

zusammen. Die Eigenfunktionen der Quantenzustände des räumlichen Oszillators lassen sich durch die Quantenzahlen der drei sie aufbauenden linearen Eigenfunktionen charakterisieren. So hat der tiefste Zustand das Quantenzahlentripel 000, der nächsttiefste die Quantenzahlentripel 100, 010 oder 001, der dritte 200 oder 110 und die vier durch Permutation aus diesen hervorgehenden Verteilungen usw. Demgemäß nimmt der tiefste Zustand 2 Teilchen auf, der zweite 6 Teilchen, der dritte 12 [allgemein der n-te $n(n+1)$]. Wenn wir in diesem Modell mehr als eine nur qualitative Annäherung sehen dürften, müßten wir also Schalenabschluß bei ${}^4_2\mathrm{He}$, ${}^{16}_{8}\mathrm{O}$, ${}^{40}_{20}\mathrm{Ca}$ erwarten. Ob diese Kerne tatsächlich energetisch ausgezeichnet sind, läßt sich nach den bisherigen Kenntnissen schwer sagen.

Die kinetische Energie der Kernbausteine folgt nun unmittelbar aus den bekannten Eigenwerten des harmonischen Oszillators, wenn man berücksichtigt, daß für ihn nach dem Virialsatz die Mittelwerte der kinetischen und der potentiellen Energie einander gleich sind. Die gegenseitige potentielle Energie der Teilchen ist dagegen natürlich nicht aus dem Oszillatorpotential, sondern mit Hilfe der aus den Eigenfunktionen (17.5) berechenbaren Dichtematrizen aus (14.20) und (16.14) abzuleiten. Z. B. folgt für ${}^4_2\mathrm{He}$

$$\varrho_P(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2) = \varrho_n(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2) = 2\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\frac{\alpha}{2}(\mathfrak{r}_1^2+\mathfrak{r}_2^2)}, \tag{17.6}$$

$$\left.\begin{aligned} E_{\mathrm{kin}} = \frac{3\hbar^2\alpha}{M}, \quad E_{\mathrm{pot}}(\mathrm{Austausch}) &= 4a\left(\frac{\alpha}{\alpha+2b^2}\right)^{3/2}, \\ E_{\mathrm{pot}}(\mathrm{Coulomb}) &= 2e^2\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}. \end{aligned}\right\} \tag{17.7}$$

In diesen und den entsprechend komplizierteren Ausdrücken für schwerere Kerne bestimmt man nun α aus der Bedingung

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = 0\,. \tag{17.8}$$

So erhält man für jeden Kern einen Wert von α und daraus und den empirischen Massendefekten eine Beziehung zwischen a und b. Diese Beziehungen sind in Fig. 14 unter „Hartreemethode" dargestellt. Wählt man $b \approx 1{,}6\, mc^2/e^2$, so folgt außerdem für den Radius von

$$^4_2\mathrm{He} \approx 0{,}54\,, \quad ^{16}_{8}\mathrm{O} \approx 0{,}80\,, \quad ^{40}_{20}\mathrm{Ca} \approx 1{,}09\, e^2/mc^2.$$

Unter dem Radius eines Kerns ist hier wie in § 15 der mittlere Abstand eines Teilchens im Kern vom Kernschwerpunkt verstanden.

Was bedeuten diese a-b-Kurven? Es ist zunächst nicht überraschend, daß sie praktisch parallel gehen, also nicht geeignet sind, ein bestimmtes Wertepaar a, b als Schnittpunkt vor anderen auszuzeichnen. Denn da die Energien der hier betrachteten Kerne innerhalb der Genauigkeitsgrenzen des Näherungsverfahrens durch das Tröpfchenmodell richtig dargestellt werden, handelt es sich bei allen drei Kernen im wesentlichen um die Berechnung einer und derselben Größe, der Volumenenergie der Kernflüssigkeit. Wir hätten daher bei einer genauen Methode für alle Kerne dieselbe a-b-Kurve erwartet; die Unterschiede zeigen den Unterschied in der Genauigkeit der Annäherung der wirklichen Eigenfunktionen durch den Hartreeschen Produktansatz (16.1) an. Obwohl die Oszillatoreigenfunktionen (17.4) wiederum ziemlich grobe Approximationen an die wirklichen Hartreeschen Eigenfunktionen sein dürften, liegen die Kurven für leichte Kerne wesentlich näher an den nach der Variationsmethode von § 15 zu erwartenden als die Thomas-Fermi-Kurve, die der strengen Lösung des Hartree-Problems für sehr schwere Kerne entspricht. Die Hartree-Methode wird also offenbar, entgegengesetzt zur Theorie der Atomhülle, für abnehmende Teilchenzahlen immer genauer. Dies wird noch ausgeprägter, wenn man berücksichtigt, daß in den Eigenfunktionen (17.4) die Schwerpunktsbewegung nicht absepariert ist und daher statt der $3(Z+N-1)$ Freiheitsgrade der Relativbewegung der Teilchen fälschlich alle $3(Z+N)$ Freiheitsgrade des Kerns zur Berechnung der kinetischen Energie herangezogen wurden. Die zugehörige Korrektur läßt sich für $^4_2\mathrm{He}$ noch relativ leicht ausführen und rückt die a-b-Kurve in die nächste Nachbarschaft der aus der Variationsmethode gewonnenen; für schwerere Kerne ist die Verschiebung natürlich wesentlich geringer, und die Grenzkurve bleibt unverändert.

Die Begründung für dieses progressive Schlechterwerden des Modells der unabhängigen Teilchen bei wachsender Teilchenzahl muß darin liegen, daß jedes Teilchen in Wirklichkeit nur mit seinen nächsten Nachbarn in starker Wechselwirkung steht. Wenn die Lage eines bestimmten Protons vorgegeben ist, so sind damit für die Neutronen nicht mehr alle Orte gleichen mittleren Potentials gleichwahrscheinlich. Dieser aus der Theorie der makroskopischen Flüssigkeiten, vor allem der Elektrolyte, bekannte Zug kann in der HARTREEschen Näherung nicht ausgedrückt werden; ihr Fehler muß daher in der Tat um so größer werden, je weniger der Kern als ein einheitliches Gebilde aufgefaßt werden kann, in dem jedes Teilchen noch gewissermaßen der Nachbar jedes anderen ist, je mehr also die Tendenz zur Auflösung in Untergruppen besteht.

Um diesen Fehler zu verbessern, müßte man die Eigenfunktionen auch von den Relativkoordinaten abhängen lassen. Es liegt nahe, den zum HARTREE-Modell entgegengesetzten Grenzfall zu behandeln: das Modell, in dem der Kern aus α-Teilchen besteht, die durch VAN DER WAALS-Kräfte aneinander gebunden sind. Da nach den Überlegungen vom Schluß des folgenden Paragraphen bei starker Annäherung zweier α-Teilchen aneinander sehr große abstoßende Kräfte auftreten, müssen auch die VAN DER WAALS-Kräfte groß sein, um einen aus α-Teilchen bestehenden Kern zusammenzuhalten. Da die VAN DER WAALS-Kraft aber die Folge einer Änderung der Eigenfunktion des einen α-Teilchens durch die Anwesenheit des anderen ist (Energiestörung 2. Näherung), ist ihre Größe ein Maß für die Abweichung des verwendeten Modells von der Wirklichkeit. Es scheint demnach, daß auch die Vorstellung, die α-Teilchen seien gleichsam die Moleküle der Kernflüssigkeit, nur einen nicht realisierten Grenzfall bedeutet; in Wirklichkeit müßte man wohl eine Linearkombination der HARTREEschen und der α-Teilchen-Eigenfunktionen verwenden, die anschaulich etwa eine „Dissoziation“ eines großen Prozentsatzes der α-Teilchen bedeutet. Rechnungen nach einem solchen Modell sind aber bisher nicht ausgeführt worden.

§ 18. Die Behandlung von Kernproblemen als Einkörperprobleme

Die Untersuchung individueller Kerneigenschaften durch die genaue Berechnung der Bewegung eines einzelnen Teilchens in dem als fest angenommenen Potentialfeld des Kernrests hat bisher in der Theorie des Kernbaus nur geringe Anwendungsmöglichkeiten gefunden. Die Konstruktion eines anschaulichen Schalenmodells durch schrittweise

Auffüllung von so gefundenen stationären Zuständen mit Neutronen bzw. Protonen, die etwa als erste Annäherung an eine strenge Lösung des HARTREE-Problems gelten könnte, findet in den spärlichen Andeutungen einer Schalenstruktur in der Erfahrung vorläufig keine hinreichende Stütze, zumal solange es nicht feststeht, wie die Existenz der Zweierschalen mit den hohen Drehimpulsen von Kernen mit einem unpaarigen Teilchen (§ 13) vereinbart werden kann. Die Energiewerte angeregter Zustände der Kerne (§ 33) haben sich wenigstens aus den bisher versuchten, sehr einfachen Einkörpermodellen nicht in befriedigender Weise ergeben. Dagegen ist die Theorie der Kernreaktionen in vielen Fällen darauf angewiesen, stoßende und emittierte Teilchen als Massenpunkte in einem festen Potential anzunehmen, da eine genauere Rechnung sehr mühsam wäre. Es erscheint daher ratsam, die Gültigkeitsgrenzen dieser Annäherung hier etwas ausführlicher zu besprechen.

Auch in der HARTREE-Methode ist das Potential, unter dessen Einfluß ein Teilchen steht, eine Funktion seiner Koordinaten allein. Trotzdem handelt es sich hier nicht um ein Einkörperproblem im engeren Sinne. Denn einerseits wird in der HARTREE-Methode verlangt, daß diese Bedingung für jedes Teilchen im Kern gelten solle, während beim Einkörperproblem *ein* Teichen ausgezeichnet sein darf; d. h. es wird nicht der Produktansatz (16.1), sondern nur die Form

$$\Psi_k(\mathfrak{r}_i, \mathfrak{r}) = \Phi(\mathfrak{r}_i)\psi_k(\mathfrak{r}) \qquad (i = 2, 3 \ldots A) \quad (18.1)$$

verlangt, in der $\mathfrak{r}$ die Koordinaten des betrachteten Teilchens, $\mathfrak{r}_i$ die der übrigen Teilchen bedeutet. Andererseits hängt in der HARTREE-Methode das Potential auf das jeweils betrachtete Teilchen von dem Zustand ab, in dem dieses sich befindet: da in einem angeregten Zustand die Eigenfunktion des Teilchens eine andere ist als im Grundzustand, ist auch seine Kraftwirkung auf die übrigen Teilchen eine andere; dadurch wiederum werden auch die Eigenfunktionen der übrigen Teilchen und damit ihr Potential auf das erste Teilchen geändert. Dagegen hat es natürlich nur dann einen Sinn, allgemein ein auf dieses Teilchen wirkendes festes Potential anzugeben, wenn dieses Potential von dem Zustand des Teilchens unabhängig ist, und das heißt, da dieses Potential eben von den übrigen Teilchen hervorgebracht wird und daher von ihrer Eigenfunktion abhängt, wenn in (18.1) für alle Zustände k des betrachteten Teilchens dieselbe Funktion $\Phi(\mathfrak{r}_i)$ steht.

Die Möglichkeit des Ansatzes (18.1) ist notwendig für die Berechtigung der Einkörper-Rechnung, aber im Fall von Austauschkräften nicht

hinreichend. Es wird ja verlangt, daß die allgemeine Schrödingergleichung im Konfigurationsraum

$$\left\{\frac{\hbar^2}{2M}\left(\sum_i \Delta_i + \Delta_{\mathfrak{r}}\right) + E - \sum_{ik} V_{ik}(\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}_k) - \sum_i V_i(\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r})\right\}\Psi(\mathfrak{r}_i, \mathfrak{r}) = 0 \quad (18.2)$$

auf die Form

$$\left\{\frac{\hbar^2}{2M}\Delta_{\mathfrak{r}} + E' - V(\mathfrak{r})\right\}\psi(\mathfrak{r}) = 0 \quad (18.3)$$

reduziert werden kann. Durch den Ansatz (18.1) zerfällt (18.2) in die beiden Gleichungen

$$\left\{\frac{\hbar^2}{2M}\sum_i \Delta_i + E - E' - \sum_{ik} V_{ik}(\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}_k)\right\}\Phi(\mathfrak{r}_i) = 0 \quad (18.4)$$

und

$$\left\{\frac{\hbar^2}{2M}\Delta_{\mathfrak{r}} + E' - \sum_i V_i(\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r})\right\}\Phi(\mathfrak{r}_i)\psi(\mathfrak{r}) = 0\,, \quad (18.5)$$

sofern es erlaubt ist, $\sum_i V_i$ neben $\sum_{ik} V_{ik}$ zu vernachlässigen. Dies ist die physikalisch selbstverständlich notwendige Voraussetzung, daß die Einwirkung des ausgezeichneten Teilchens auf die übrigen Teilchen vernachlässigt werden kann gegen deren Wirkung aufeinander; ihre Gültigkeit besprechen wir weiter unten. Dagegen muß die $\sum_i V_i$ in (18.5) natürlich berücksichtigt werden. Sie liefert das gesuchte mittlere Potential, wenn man (18.5) von links mit $\Phi^*(\mathfrak{r}_i)$ multipliziert und über alle $\mathfrak{r}_i$ integriert. Es ergibt sich

$$\left\{\frac{\hbar^2}{2M}\Delta_{\mathfrak{r}} + E'\right\}\psi(\mathfrak{r}) - Q = 0 \quad (18.6)$$

mit

$$Q = \sum_i \int \Phi^*(\mathfrak{r}_i)\, V_i(\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r})\,\Phi(\mathfrak{r}_i)\,\psi(\mathfrak{r})\,d\mathfrak{r}_i\,. \quad (18.7)$$

Wenn nun die V_i gewöhnliche Potentiale sind, die keine Austauschoperatoren enthalten, so ist nach (18.7) Q von der nach (18.3) gewünschten Form $V(\mathfrak{r})\,\psi(\mathfrak{r})$. Steht aber V_i für das Austauschpotential $J(\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r})\,P(\mathfrak{r}_i\mathfrak{r})$, so wird $\psi(\mathfrak{r})$ durch die Permutation selbst unter das Integralzeichen gezogen. Nimmt man etwa um der einfachen Schreibweise willen an, Φ sei ebenfalls als Produkt von Eigenfunktionen der einzelnen Teilchen zerlegbar, so wird Q eine Summe von Z bzw. N Gliedern der Form

$$Q_i = \int \varphi^*(\mathfrak{r}_i)\, J(\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r})\,\varphi(\mathfrak{r})\,\psi(\mathfrak{r}_i)\,d\mathfrak{r}_i\,. \quad (18.8)$$

Dieser Ausdruck ist nur in einem Grenzfall von der in (18.3) geforderten Form mit einem von ψ unabhängigen Potential $V(\mathfrak{r})$, nämlich dann, wenn man annehmen darf, daß sämtliche Eigenfunktionen langsam veränderlich

seien verglichen mit J. Denn dann kann man die Integration ausführen und erhält, wenn

$$\int J(\mathfrak{r}')\,d\mathfrak{r}' = I \tag{18.9}$$

gesetzt wird,

$$Q_i = I\varphi^*(\mathfrak{r})\varphi(\mathfrak{r})\psi(\mathfrak{r}), \tag{18.10}$$

d. h.

$$V(\mathfrak{r}) = I\varrho(\mathfrak{r}), \tag{18.11}$$

wobei ϱ die Dichte der Protonen oder Neutronen bedeutet, je nachdem ob das betrachtete Teilchen ein Neutron oder Proton ist. Nun rührt dieses Ergebnis, wie (18.10) lehrt, davon her, daß wegen des raschen Abfalls der Austauschkraft die beiden Teilchen einander nur dann beeinflussen, wenn sie am selben Ort sind und die Ortspermutation daher keine Änderung des Ausdrucks hervorruft. Da in diesem Fall kein Unterschied mehr zwischen der Austauschkraft und der gewöhnlichen Kraft besteht, kann aber dann auch kein Absättigungsphänomen mehr auftreten. Es ist in der Tat unmittelbar einleuchtend, daß die Absättigung, die von dem Symmetriecharakter der Eigenfunktion gegenüber der Vertauschung der Teilchen untereinander abhängt, die Angabe eines festen, auf ein bestimmtes Teilchen unabhängig von dessen Eigenfunktion wirkenden Potentials ausschließt. Damit ist der Berechnung angeregter Zustände oder Schalen im Kern nach dem Einkörpermodell die theoretische Grundlage entzogen.

Dagegen kann es natürlich erlaubt sein, für eine kleine Anzahl von Zuständen ein gemeinsames Potential anzugeben. Dies ist wesentlich für die Theorie der Kernreaktionen, die durch den Stoß hinreichend langsam bewegter Teilchen ausgelöst werden (VAN VLECK, 91). Denn da das Potential im Kerninnern für ein Proton oder Neutron sicher um mehr als 10^7 Volt tiefer liegt als im unendlichen Abstand vom Kern, bedeutet eine prozentual ziemlich große Änderung der Energie des Teilchens außerhalb des Kerns nur eine prozentual sehr geringe Änderung der Höhe seiner Energie über dem Boden des „Potentialtopfs“ (vgl. § 28) und daher eine geringe Änderung seiner Eigenfunktion im Kern. Das effektive Potential hängt dann also zwar von der Eigenfunktion des stoßenden Teilchens ab, diese Eigenfunktion selbst ist aber für einen beträchtlichen Energiebereich in den wesentlichen Gebieten ungefähr dieselbe, und man kann daher die Einkörpermethode wenigstens mit demselben Recht anwenden wie im Fall einer gewöhnlichen Kraft.

Dagegen darf man für rasch bewegte Teilchen nicht mehr mit der Idealisation des festen Potentials rechnen. Dies gilt auch für α-Teilchen, deren Wechselwirkung miteinander und mit anderen Kernteilchen als

Überlagerung mehrerer Austauschkräfte ebenfalls nicht durch ein von der Eigenfunktion unabhängiges Potential dargestellt werden kann. Da für die praktische Rechnung trotzdem im allgemeinen keine andere Möglichkeit als eine rohe Schematisierung durch ein derartiges Potential bleibt, sei die Ortsabhängigkeit des Potentials zwischen zwei α-Teilchen nach HEISENBERG (53) qualitativ angegeben. Man kann z. B. annehmen, die Eigenfunktionen hingen von den Schwerpunktskoordinaten jedes der beiden α-Teilchen nach einer Gausskurve $e^{-\eta r_S^2}$ ab, und die beiden Schwerpunkte befänden sich im Abstand S voneinander. Man erhält dann bei sehr kleinen Abständen eine sehr starke Abstoßungskraft, die der Abstoßung abgeschlossener Schalen in der Atomhülle entspricht. Anschaulich hat sie ihren Grund im Pauliprinzip, das fordert, daß mehrere Teilchen sich nur dann im selben Raumgebiet aufhalten können, wenn sich nicht mehr als zwei im Zustand tiefster Energie befinden. Für die Parameterwerte $a = 121$, $b = 2{,}4$ im Kraftgesetz (15.1) erhält man z. B. für die potentielle Energie dieser Abstoßung

$$E_{\text{pot}}^{\text{A}} = 58{,}4\,\eta^{3/2} e^{-\eta S^2} \tag{18.12}$$

was verglichen mit dem Massendefekt des α-Teilchens (29,8 in den hier verwendeten Einheiten) sehr groß ist. $E_{\text{pot}}^{\text{A}}$ hängt von der Abfallsbreite $\eta^{-1/2}$ der Eigenfunktionen ab und kann nach (18.12) durch sehr steilen Abfall der Schwerpunktseigenfunktion klein gemacht werden; jedoch wächst dann gleichzeitig die kinetische Nullpunktsenergie der beiden α-Teilchen stark an. Für größere Abstände überwiegt eine anziehende Kraft, die von der Störung zweiter Näherung (d. h., wie in § 17 besprochen, von der Möglichkeit der Anregung und Zerlegung der α-Teilchen) herrührt, die in Analogie zu den Kräften zweiter Näherung in der Molekültheorie als VAN DER WAALS-Kraft bezeichnet wird. Eine Abschätzung ergibt für sie die Größenordnung

$$E_{\text{pot}}^{\text{v.d.W.}} = -8\,\frac{a^2}{E_m}\left(\frac{\eta}{\eta + 2b^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{2\eta b^2}{\eta + 2b^2} S^2}. \tag{18.13}$$

E_m ist dabei eine mittlere Anregungsenergie des α-Teilchens, für die schwer eine quantitative Schätzung möglich ist. Diese Kraft ist für die Bindung der α-Teilchen in größeren Kernen verantwortlich. Bei noch größeren Abständen überwiegt schließlich die Coulombsche Abstoßung.

Es bleibt nun noch die Frage zu erörtern, wieweit der Einkörperansatz in den Fällen berechtigt ist, in denen die bisher besprochenen Schwierigkeiten nicht auftreten, also einerseits für den Stoß langsamer Teilchen, andererseits für die Behandlung von Kraftwirkungen, die nicht

Austauschcharakter haben. Es handelt sich also um die Frage, ob in (18.2) $\sum_{ik} V_{ik}$ als groß gegen $\sum_{i} V_i$ angesehen werden darf. Hierzu ist zweierlei notwendig (sofern das betrachtete Teilchen nicht, wie z. B. vermutlich ein Elektron, von Natur eine wesentlich geringere Wechselwirkung mit den Kernbausteinen hat, als diese untereinander): 1. daß die Teilchenzahl groß ist, weil nur dann die Zahl der Summenglieder in der Doppelsumme groß ist gegen die in der einfachen, 2. daß es nicht oder mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit vorkommt, daß die Wechselwirkung zwischen zwei Teilchen (die einander z. B. gerade nahe benachbart sein mögen) diejenige dieser beiden Teilchen mit allen anderen wesentlich übertrifft, weil nur dann die einzelnen Summenglieder mit Sicherheit von vergleichbarer Größenordnung sind. Die erste Voraussetzung ist bei schweren Kernen erfüllt, die zweite würde dagegen bei sehr starker Abhängigkeit der Kraft vom Abstand durchbrochen und steht außerdem, soweit es sich um Austauschkräfte handelt, wiederum zum Absättigungsphänomen im Gegensatz, nach dem ja gerade das Vorhandensein großer Teilchenzahlen die Bindungsenergien nicht wesentlich beeinflußt. Es ist schwer, den Fehler allgemein anzugeben; jedenfalls müssen wir uns auf Grund dieser Betrachtungen bei allen künftigen Rechnungen darüber klar sein, daß das Einkörpermodell höchstens zu einer Abschätzung geeignet ist, die nur dann Vertrauen verdient, wenn sich ihre Ergebnisse auch bei der Verwendung anderer Annäherungen qualitativ verstehen lassen.

Drittes Kapitel

Kernreaktionen

1. Der α-Zerfall

§ 19. Anschauliche Deutung der Grundphänomene

Eine zuverlässige quantenmechanische Theorie läßt sich bis jetzt nur für den Verlauf derjenigen Kernreaktionen geben, bei denen keine leichten Teilchen mitwirken. Wir beschränken uns im vorliegenden Kapitel auf diese Prozesse. Am längsten bekannt und prinzipiell am einfachsten unter ihnen ist die spontane Emission der α-Teilchen aus radioaktiven Kernen. Sie ist der einzige ohne äußere Anregung verlaufende Kernprozeß mit Aussendung schwerer Teilchen. Ehe wir zur Behandlung des umfangreichen Gebiets der erzwungenen Kernreaktionen übergehen, können wir an ihr als dem klassischen Beispiel der quantenmechanischen Kerntheorie die wesentlichen Eigenschaften aller derartigen Reaktionen studieren.

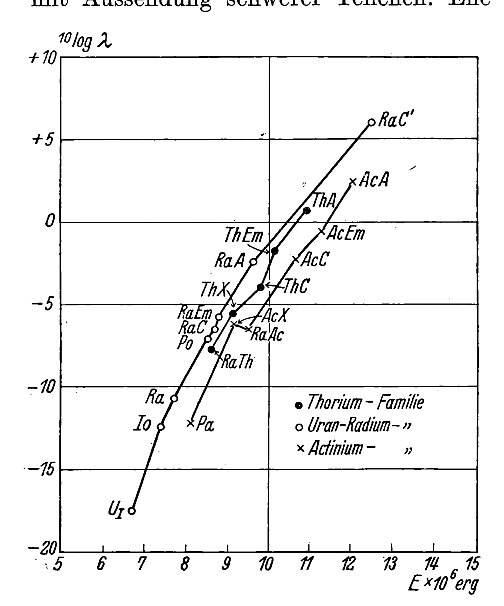


Fig. 17. Zerfallskonstanten λ (in $\sec^{-1}$) und Zerfallsenergien der α-Strahler (nach GAMOW, 42).

Die Fragen, unter welchen Umständen schwere Teilchen von Kernen spontan emittiert werden können und warum nur α-Teilchen hierbei beobachtet werden, lassen sich durch rein energetische Überlegungen beantworten; sie sind im § 8 behandelt. Es bleiben die Fragen: Welche energetisch möglichen Zerfallsprozesse finden tatsächlich statt, und

welcher Zusammenhang besteht zwischen den für den Zerfall charakteristischen Größen, insbesondere den am leichtesten meßbaren, Zerfallsenergie und Zerfallswahrscheinlichkeit?

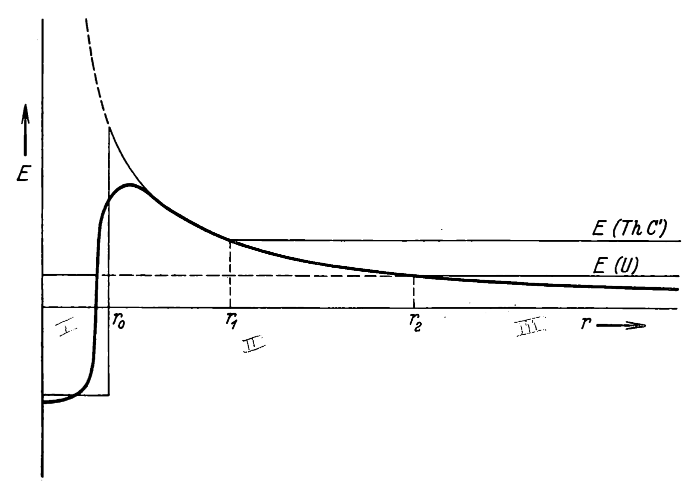


Fig. 18. Idealisiertes Potential zwischen einem schweren Kern (z. B. Uran) und einem α-Teilchen. E(U) = Energie der Uran-α-Teilchen. E(ThC') = Energie der ThC'-α-Teilchen.

Die theoretische Deutung des α-Zerfalls ging aus von einigen scheinbar paradoxen empirischen Daten, die sich auf die Länge der Lebensdauern und auf den Potentialverlauf in der Umgebung eines radioaktiven Kerns bezogen.

Die Lebensdauern der meisten α-Strahler sind um viele Zehnerpotenzen größer als alle bekannten atomaren Schwingungsperioden. Vgl. die in Fig. 17 angegebenen Werte der Zerfallskonstanten. Das Verständnis dieser Tatsache würde nach der klassischen Mechanik einen sehr komplizierten Zerfallsmechanismus voraussetzen. An sich läge es ja nahe, für eine qualitative Beschreibung des Vorgangs den Kern, in dem das α-Teilchen gebunden ist, durch ein Potentialfeld der in Fig. 18 gezeichneten Art darzustellen. Der Abfall in großem Kernabstand entspricht der beobachteten Coulombschen Abstoßung zwischen Kern und α-Teilchen; der Abfall im Kerninnern ist notwendig, um die Bindung des α-Teilchens an den Kern zu erklären und rührt nach der heutigen Vorstellung hauptsächlich von der Neutron-Proton-Kraft her. Zwischen beiden Gebieten tiefen Potentials liegt eine Potentialschwelle. Nach der klassischen Mechanik wären nun drei Fälle denkbar: 1. Die Energie des α-Teilchens im Kern

liegt tiefer als das durch die Asymptote der COULOMBschen Abstoßung gegebene Nullniveau, d. h. als die Energie eines ruhenden freien α-Teilchens fern vom Kern. Dann kann das Teilchen den Kern nicht verlassen; der Kern ist stabil. 2. Die Energie des α-Teilchens im Kern liegt über dem Nullniveau, aber unter der Maximalenergie der Potentialschwelle. Dann wird das Teilchen nur durch die Schwelle festgehalten; der Kern ist energetisch labil, praktisch stabil. 3. Die Energie des α-Teilchens liegt über der Schwellenenergie. Dann wird das Teilchen in einem Zeitraum, der nicht wesentlich größer ist als die zum Durchqueren des Kerns benötigte Zeit (ca. 10^{-21} sec bei den bekannten Geschwindigkeiten der α-Teilchen) den Kern verlassen; der Kern ist labil mit sehr geringer Lebensdauer. Die Wirklichkeit liegt offenbar zwischen 2. und 3.; weder kann das α-Teilchen den Kern ungehindert verlassen, noch wird es dauernd festgehalten. Das bisher verwendete Bild des Zerfalls muß also in irgendeiner Hinsicht zu einfach sein.

Diese Schwierigkeit wurde unterstrichen durch eine Untersuchung des Kraftfeldes in der Nähe des Urankerns mit Hilfe der α-Teilchen von ThC', die eine größere kinetische Energie besitzen als die von Uran emittierten. Aus der Winkelverteilung der gestreuten Strahlen läßt sich der Potentialverlauf in der Kernumgebung ermitteln (vgl. § 28—30). RUTHERFORD fand nun, daß das COULOMBsche Gesetz auch für die kleinsten erreichbaren Kernabstände noch richtig ist, also auch an Punkten, an denen die COULOMBsche potentielle Energie schon größer ist als die kinetische Energie der vom Uran emittierten α-Teilchen. Damit ist direkt gezeigt, daß man in diesem Gebiet von einer wohldefinierten COULOMBschen Potentialschwelle sprechen kann und daß diese höher ist als die den α-Teilchen verfügbare Energie. Wie kann das α-Teilchen trotzdem den Kern verlassen?

Die wichtigste positive Angabe, welche die Erfahrung für die Aufklärung dieser Schwierigkeit liefert, ist die GEIGER-NUTTALLsche Beziehung zwischen der Lebensdauer eines α-Strahlers und der kinetischen Energie der emittierten Teilchen (der Zerfallsenergie). Quantitativ behandeln wir sie im § 21; ihr wesentlicher Inhalt ist, daß die Zerfallswahrscheinlichkeit exponentiell mit der Zerfallsenergie anwächst (vgl. Fig. 17.)—

Wie GAMOW und gleichzeitig CONDON und GURNEY gezeigt haben, liegt die Lösung der Schwierigkeit nicht in einer Abweichung von dem einfachen Einkörpermodell des Zerfalls, sondern in der Anwendung der Quantenmechanik auf dieses Modell. Nach der Quantenmechanik tritt neben das korpuskulare Bild der Bewegung der Materie als komplementäre

Ergänzung das Wellenbild. Die Bewegung eines Massenpunkts der Gesamtenergie E in einem Potential $V(\mathfrak{r})$ ist bestimmt durch die Fortpflanzung einer kontinuierlich im Raum verbreiteten Wellenfunktion $\psi(\mathfrak{r})$ in einem Medium von räumlich veränderlichem Brechungsindex $\sqrt{(E - V(\mathfrak{r}))/E}$; das Absolutquadrat der Wellenfunktion: $\psi^*(\mathfrak{r})\,\psi(\mathfrak{r})$ gibt die relative Wahrscheinlichkeit dafür an, bei einer Messung das Teilchen am Ort $\mathfrak{r}$ zu finden.

Um nun die Bewegung des α-Teilchens im Kern zu untersuchen, denken wir uns das Potential der Fig. 18 zunächst ersetzt durch einen Potentialtopf mit unendlich steilen Wänden; d. h. wir nehmen an, das α-Teilchen sei durch unendlich große Kräfte am Überschreiten eines bestimmten Kernrandes gehindert. Auf die Wellenfunktion wirkt ein solcher Kern wie ein Hohlraum mit absolut spiegelnden Wänden auf eine Lichtwelle. Es bilden sich Eigenschwingungen aus, deren Frequenzen nach der Gleichung $E = h\nu$ die möglichen Energien der stationären Zustände des α-Teilchens bestimmen. Hieran ändert sich prinzipiell nichts, wenn die Potentialwände schräg sind, solange das Potential außerhalb des Kerns nicht wieder abnimmt. In die Gebiete, in denen $E - V$ negativ ist, kann die Wellenfunktion zwar, im Gegensatz zur klassischen Teilchenbahn, eindringen, aber der imaginäre Brechungsindex bedingt wie in der Optik ein exponentielles Abklingen der Wellenfunktion nach außen. Die stationären Zustände bestimmen sich auch hier als Eigenschwingungen der ψ-Funktion, die nunmehr nicht mehr am Potentialrand, sondern im Unendlichfernen verschwinden muß.

Ein neues Phänomen tritt aber auf, wenn das Potential außerhalb des Kerns wieder kleiner wird als E. Es ist aus der Optik bekannt, daß man die Totalreflexion aufheben kann, wenn man der reflektierenden Oberfläche ein zweites Medium von hinreichend großem Brechungsindex so nahe bringt, daß es in die dünne Schicht eindringt, in der die exponentiell abfallende Intensität noch nicht unmerklich klein geworden ist. Dieselbe Situation ist im α-radioaktiven Atomkern verwirklicht. An der Stelle, an der $E - V$ wieder positiv, der Brechungsindex also wieder reell wird, geht die exponentiell abfallende Wellenfunktion wieder in eine fortlaufende Welle über, deren Intensität um einen durch den Abfall von ψ in der Schwelle bestimmten Faktor kleiner ist als die Intensität im Kerninnern. Es besteht also eine kleine, aber endliche Wahrscheinlichkeit dafür, daß das α-Teilchen die Schwelle durchsetzt, d. h. daß der Kern zerfällt. Man erkennt auch, daß die Zerfallswahrscheinlichkeit exponentiell mit der Zerfallsenergie anwachsen muß: eine Erhöhung der Zerfallsenergie setzt (vgl. Fig. 18) die effektive Dicke der Schwelle

entsprechend herab; da aber die Eigenfunktion in der Schwelle exponentiell abnimmt, wird auch die Amplitude im Außenraum, welche die Durchlässigkeit der Schwelle mißt, exponentiell mit abnehmender Schwellendicke zunehmen. Wir verfolgen diesen Vorgang mathematisch im nächsten Paragraphen.

Es sei hervorgehoben, daß diese Erklärung des α-Zerfalls von den unanschaulichen Zügen der Quantenmechanik wesentlich Gebrauch macht. Denn sie muß zur Beschreibung des einheitlichen Vorgangs des α-Zerfalls gleichzeitig die beiden anschaulichen Bilder der Quantenmechanik verwenden, die, wörtlich verstanden, einander ausschließen würden. Einerseits kann, in dem verwendeten einfachen Modell, das reine Korpuskelbild schon das bloße Zustandekommen des Zerfalls nicht erklären, wie die oben diskutierten Paradoxien zeigen. Andererseits ist das, was man außerhalb des radioaktiven Kerns beobachtet, nicht eine fortlaufende kontinuierliche Welle, sondern das einmalige Aufschlagen eines Teilchens auf einem Szintillationsschirm oder die einmalige, räumlich und zeitlich scharf definierte Spur in der Wilsonkammer. Man kann die α-Radioaktivität so gleichsam als eine direkte experimentelle Illustration der Unbestimmtheitsrelation ansehen: Wenn wir die Energie des α-Teilchens im Kern genau kennen, so ist es nicht möglich, seinen Ort genau festzulegen. Es besteht eine, wenn auch sehr kleine Wahrscheinlichkeit, es außerhalb des Potentialwalls anzutreffen. Darin unterscheiden sich die α-Teilchen im Kern zunächst nicht von den Elektronen im Atom; auch das Elektron eines Wasserstoffatoms hat ja eine sehr kleine, aber endliche Aufenthaltswahrscheinlichkeit in Gebieten, die es nach der klassischen Mechanik nicht erreichen könnte (vgl. etwa W. Heisenberg, 49, S. 25—26). Beim Kern wird dieser Umstand nur dadurch augenfällig, daß das α-Teilchen, wenn es sich einmal hinreichend weit außerhalb des Kerns befindet, den Kern definitiv verlassen kann. Ein schönes Beispiel dafür, wie durch die Unbestimmtheitsrelation die klassische Mechanik nicht durchbrochen, sondern nur in gewisser Weise unanwendbar gemacht wird, liefert die Überlegung, daß wir ja eigentlich nicht die Energie, sondern den Ort des α-Teilchens vor dem Zerfall genau kennen: wir wissen nämlich sicher, daß es sich im Innern des Kerns befindet. Sieht man diese Kenntnis als vorgegeben an, so wird dadurch seine Energie eben soweit unbestimmt, daß sie mit einer, wenn auch sehr kleinen Wahrscheinlichkeit größer ist als die zur Überwindung der Schwelle notwendige Energie (Bohr, 12).

Durch die Tatsache, daß eben die Abweichungen der atomaren Gesetze von der klassischen Physik das Phänomen des α-Zerfalls erst ermöglichen,

ist auch der statistische Charakter des Zerfallsgesetzes bedingt. Sieht man von den Ungenauigkeiten ab, die von der Behandlung des Zerfalls als Einkörperproblem herrühren, so ist die quantenmechanische Theorie des α-Zerfalls daher als vollständig anzusehen, obwohl sie keine genaue Voraussage erlaubt über den Zeitpunkt des Zerfalls eines bestimmten, vorgegebenen Kerns. Untersuchungen über die Grundlagen der Quantenmechanik (vgl. 55) zeigen, daß schon die Annahme einer objektiven, nur im Moment noch unbekannten physikalischen Größe, die diesen Zeitpunkt determiniert, einen Widerspruch gegen die positiven, experimentell greifbaren Voraussagen der Quantenmechanik erzwingt.

§ 20. Mathematische Theorie des α-Zerfalls

Die quantenmechanische Behandlung des α-Zerfalls ist bis jetzt nur nach dem auch in den anschaulichen Betrachtungen verwendeten Einkörpermodell möglich gewesen. Wir schließen uns diesem Verfahren an, suchen also die Bewegung eines als Massenpunkt idealisierten α-Teilchens in einem kugelsymmetrischen Potential der durch Fig. 18 gegebenen Form zu berechnen, und diskutieren nachträglich die Genauigkeitsgrenzen dieser Annäherung. — Im Rahmen des Einkörpermodells ist eine Reihe verschiedener Rechnungsmethoden entwickelt worden, die sich weniger durch die Art der Überwindung von mathematischen Schwierigkeiten als durch die Wahl des physikalischen Ansatzes voneinander unterscheiden. Es handelt sich darum, den eigentümlichen nichtstationären Charakter des Problems zugleich korrekt und bequem zu erfassen.

Löst man nämlich in dem Potential der Fig. 18 die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung, so erhält man ein kontinuierliches Eigenwertspektrum. Die zugehörigen Eigenfunktionen sind in großem Abstand vom Kern fast genau die Eigenfunktionen freier Teilchen im Coulombfeld (sie stellen „Hyperbelbahnen“ dar). Im Innern des Kerns sind sie außerordentlich klein, bis auf die engste Umgebung der Energiewerte, für welche im Kerninnern, bei Vernachlässigung der Durchlässigkeit der Potentialschwelle, ein stationärer Zustand möglich wäre. Mathematisch liegt dies daran, daß in der Schwelle sowohl die nach außen wie die nach innen exponentiell abnehmenden Lösungen der Schrödinger-Gleichung berücksichtigt werden müssen. Sie treten im allgemeinen in einer Linearkombination auf und die diskreten stationären Zustände rühren gerade daher, daß die Lösungen im Kerninnern und in der Schwelle nur bei ganz bestimmten Energien so aneinandergefügt werden können, daß die nach

außen ansteigende Lösung in der Schwelle nicht auftritt und daher die Eigenfunktion im Unendlichfernen nicht unendlich groß wird, sondern verschwindet. Wenn nun die potentielle Energie wie in Fig. 18 an einer bestimmten Stelle r_2 wieder kleiner wird als E, so wird offenbar auch nur diese Lösung (und die nahe benachbarten) bei r_2 eine sehr viel kleinere Amplitude als im Kerninnern haben, während alle Lösungen, die zu wesentlich anderen Energien gehören, ein Anwachsen der Amplitude nach außen zeigen.

Diese Eigenfunktionen stellen aber nicht den zeitlich verlaufenden Zerfallsprozeß dar, da sie ihre Form gar nicht mit der Zeit ändern (als Lösungen der zeitunabhängigen Wellengleichung enthalten sie die Zeit nur im Schwingungsfaktor $e^{-iEt/\hbar}$; sie bedeuten vielmehr einen Zustand, in dem sich das Teilchen von vornherein mit größter Wahrscheinlichkeit außerhalb des Kerns befindet. Die prinzipiell durchsichtigste Behandlung des α-Zerfalls (Rice, 79) besteht nun darin, zunächst eine Linearkombination dieser Lösungen aufzubauen, die nur im Kerninnern von Null verschieden ist (und daher einen Energiebereich von einer gewissen Breite umfaßt). Man sucht dann eine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung, die in einem bestimmten Augenblick mit dieser Linearkombination übereinstimmt, und berechnet die Zerfallswahrscheinlichkeit aus der zeitlichen Zunahme des Absolutquadrats der Wellenfunktion außerhalb des Kerns, die davon herrührt, daß die zu verschiedenen Energien gehörigen Eigenfunktionen, deren Anteile außerhalb des Kerns sich im ersten Moment durch Interferenz gerade aufhoben, nach und nach außer Phase geraten und sich schließlich addieren. Man erhält das einleuchtende Resultat, daß diese Zunahme sehr rasch vonstatten geht, wenn man Wellenfunktionen verwendet hat, deren Amplituden im Außenraum groß gegen die im Kerninnern sind. Dagegen geschieht die Zunahme — und die wegen der Erhaltung der Teilchenzahl dazugehörige Abnahme der Dichte im Kern — langsam, wenn man sich mit den verwendeten Energien in der nächsten Umgebung der Energie eines stationären Zustandes des Kerninnern befindet. Selbst wenn man mit Kernen aller möglichen Energien beginnt, werden daher nach kurzer Zeit nur die Kerne dieser bestimmten Energie unzerfallen zurückbleiben. Man erkennt so, wie sich auch in dem an sich kontinuierlichen Energiespektrum des labilen Kerns die Energieniveaus eines im inneren Potentialverlauf gleichartigen stabilen Kerns als „quasistationäre Zustände" herausheben.

Zur Rechnung bequemer ist die Gamowsche Methode des „komplexen Eigenwerts" (40). Sie geht davon aus, daß ein exponentieller zeitlicher

Abfall der Dichte im Kern zu erwarten ist, und sucht daher von vornherein eine Lösung der zeitabhängigen Wellengleichung zu erraten, die diese Eigenschaft hat. Sie setzt also den zeitabhängigen Faktor der Eigenfunktion in der Form $e^{-\frac{iEt}{\hbar}-\frac{\lambda}{2}t}$ an. λ ist dann die zeitliche Abfallskonstante der Dichte, d. h. die normal definierte Zerfallskonstante; sie wird durch Einsetzen der Eigenfunktion in die Wellengleichung bestimmt. Die Größe $E+\frac{\hbar}{i}\frac{\lambda}{2}$ kann man als „komplexen Eigenwert" bezeichnen; das hat denselben rein formalen Sinn wie z. B. in der Metalloptik die Zusammenfassung des Brechungsindex und der Dämpfungskonstante der Lichtwellen zu einem „komplexen Brechungsindex". Im übrigen gibt der Absolutbetrag des imaginären Zusatzgliedes die Breite ΔE an, um welche infolge der Möglichkeit des Zerfalls die Energie des stationären Zustands unbestimmt wird.

Der Versuch, die SCHRÖDINGER-Gleichung in einem Potential der Form Fig. 18 streng zu lösen, bietet bei der Ungenauigkeit des Modells kein Interesse. Wir stellen daher das Potential näherungsweise dar durch

$$V(r)=\begin{cases} V_0 & (r<r_0) \\ \frac{2(Z-2)e^2}{r} & (r>r_0), \end{cases} \tag{20.1}$$

(vgl. Fig. 18). Der Faktor des COULOMBschen Potentialanteils ergibt sich als Produkt der Ladungen $2e$ des α-Teilchens und $(Z-2)e$ des Restkerns. In diesem Potential lösen wir die Wellengleichung wiederum näherungsweise nach der Methode von WENTZEL, KRAMERS und BRILLOUIN (kurz W.K.B.-Methode). Diese Methode ist anwendbar, wenn das Potential nicht zu rasch variiert, also für $r>r_0$, falls die Schwelle hinreichend breit, d. h. der Eigenwert hinreichend tief unter der Maximalenergie der Schwelle ist; nur dann kann ja auch der idealisierte Potentialverlauf (20.1), dessen scharfe Spitze sicher nicht reell ist, die Wirklichkeit mit einiger Annäherung darstellen. Für $r<r_0$ lassen sich die strengen Lösungen der Wellengleichung leicht angeben.

Durch den Ansatz

$$\psi=\frac{1}{r}\,\varphi(r)\,Y_l^m(\vartheta,\varphi) \tag{20.2}$$

erhält die SCHRÖDINGER-Gleichung nach Abseparation der Winkelvariablen die Gestalt

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}=\left\{E-V(r)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right\}\varphi\,. \tag{20.3}$$

Unter M ist hierbei die reduzierte Masse

$$M=\frac{M_\alpha M_k}{M_\alpha+M_k} \tag{20.4}$$

zu verstehen, die bei schweren Kernen ($M_k \gg M_\alpha$) nahezu mit der Masse des α-Teilchens übereinstimmt. Für die folgende Rechnung nehmen wir der Übersichtlichkeit halber an, das α-Teilchen besitze keinen Drehimpuls (d. h. $l = 0$). Das Glied $\frac{l(l+1)}{r^2}$ fällt dann fort; die Ergebnisse für endliches l folgen aus einer ganz analogen Rechnung. Wir teilen ferner das Potential ein in drei Gebiete: I: $r < r_0$; II: $r_0 < r < r_2$; III: $r_2 < r$. $r_2 = \frac{2(Z-2)e^2}{E}$ ist hierbei die Stelle, an der $E = V$ wird, also der Umkehrpunkt der klassischen Bahn eines von außen auf den Kern zulaufenden Teilchens.

Die Lösung von (20.3) im Gebiet I lautet unter Berücksichtigung der Grenzbedingung, daß bei $r = 0$ ψ endlich bleiben, also φ verschwinden muß

$$\varphi_{\mathrm{I}}(r) = a \sin K r \tag{20.5}$$

mit

$$K = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2M(E - V_0)}. \tag{20.6}$$

In II und III führen wir durch

$$\varphi = e^{\frac{i}{\hbar}\int y\,dr} \tag{20.7}$$

die neue Variable y ein und entwickeln nach der Vorschrift der W.K.B.-Methode nach Potenzen des Wirkungsquantums

$$y = y_0 + y_1 + \cdots \tag{20.8}$$

Aus (20.3) und (20.7) folgt für $l = 0$

$$\frac{1}{2M} y^2 - \frac{i\hbar}{2M} y' = E - V, \tag{20.9}$$

daraus

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2M} y_0^2 &= E - V\,; \quad & y_0 &= \pm \sqrt{2M(E-V)} = \pm\, p_r \\ \frac{1}{M} y_0 y_1 - \frac{i\hbar}{2M} y_0' &= 0\,; & y_1 &= \frac{i\hbar}{2} \frac{y_0'}{y_0} \end{aligned}\right\} \tag{20.10}$$

und so im ganzen

$$\varphi = \mathrm{const}\, e^{\pm\frac{i}{\hbar}\int p_r\,dr - \frac{1}{2}\int \frac{p_r'}{p_r}\,dr} = \mathrm{const}\, \frac{1}{\sqrt{p_r}}\, e^{\pm\frac{i}{\hbar}\int p_r\,dr}. \tag{20.11}$$

Diese Formel stellt im Gebiet III die Bewegung eines Teilchens der Geschwindigkeit p_r/M wellenmechanisch dar; im Gebiet II, in dem p_r imaginär ist, liefert sie den exponentiellen Abfall bzw. Anstieg. Sie ist allerdings nicht brauchbar in der Umgebung von r_2, weil dort y_0 verschwindet. Nach Kramers (63) erleidet dort die Funktion einen Phasensprung um $\pi/4$. Setzt man im Gebiet III

$$\varphi_{\mathrm{III}} = \frac{1}{\sqrt{p_r}}\, e^{+\frac{i}{\hbar}\int_{r_2}^{r} p_r\,dr}, \tag{20.12}$$

so folgt daher für das Gebiet II

$$\varphi_{\mathrm{II}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{|p_r|}} e^{+\frac{1}{\hbar}\int\limits_r^{r_2} |p_r|\, dr} + \frac{1+i}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{|p_r|}} e^{-\frac{1}{\hbar}\int\limits_r^{r_2} |p_r|\, dr} \tag{20.13}$$

Wir haben für φ_{III} das positive Vorzeichen im Exponenten gewählt, um auszudrücken, daß im Gebiet III nur eine auslaufende und keine einlaufende Kugelwelle vorhanden ist, d. h. daß der Kern zerfällt und nicht durch von außen kommende α-Teilchen sich aufbaut. Wie man nach den vorangehenden Überlegungen zu erwarten hat, ist diese Wahl gleichbedeutend mit der Wahl eines komplexen Eigenwertes. An der Stelle r_0 muß φ_{II} ja, um die Wellengleichung zu befriedigen, stetig und mit stetiger Ableitung an φ_{I} angeschlossen werden. Außer der Normierungskonstante, die uns nicht interessiert, ergibt sich hieraus die Bedingung

$$\left(\frac{\varphi_{\mathrm{I}}'}{\varphi_{\mathrm{I}}}\right)_{r=r_0} = \left(\frac{\varphi_{\mathrm{II}}'}{\varphi_{\mathrm{II}}}\right)_{r=r_0}, \tag{20.14}$$

d. h.

$$K \operatorname{cotg} K r_0 = -\frac{|p_0|}{\hbar}\left(1 - i\, e^{-\frac{2}{\hbar}\int\limits_{r_0}^{r_2} |p_r|\, dr}\right) \tag{20.15}$$

(p_0 ist der Wert von p_r bei $r = r_0$). Wenn nun K rein reell ist, so läßt sich diese Bedingung wegen des exponentiell kleinen imaginären Zusatzgliedes auf der rechten Seite nicht streng befriedigen. Wir setzen daher

$$E = E' - \frac{i\hbar}{2}\lambda \tag{20.16}$$

und erhalten unter Benutzung der Relationen

$$\frac{\partial K}{\partial E} = \frac{M}{\hbar^2 K} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial |p_0|}{\partial E} = -\frac{M}{|p_0|} \tag{20.17}$$

die Gleichung

$$-\frac{i\lambda\hbar}{2}\frac{M}{\hbar^2 K}\left(\operatorname{cotg} K r_0 - \frac{K r_0}{\sin^2 K r_0}\right) = -\frac{i\lambda\hbar}{2}\frac{M}{\hbar |p_0|} + i\, e^{-\frac{2}{\hbar}\int\limits_{r_0}^{r_2} |p_r|\, dr} \cdot \frac{|p_0|}{\hbar}. \tag{20.18}$$

Man pflegt diese Gleichung vereinfacht zu lösen, indem man $K r_0$ als sehr groß ansieht und nur das zweite Glied der linken Seite berücksichtigt. Dies ist strenggenommen unberechtigt, da ja der Grundzustand eines α-Teilchens im Kern gerade durch $K r_0 \leq 2\pi$ gegeben ist. Wegen der Ungenauigkeit der gesamten Rechnung ist der genaue Wert des Vorfaktors aber unwesentlich. Wir erhalten mit dieser Vereinfachung

$$\lambda = \frac{4 \sin^2 K r_0 \cdot |p_0|}{M r_0} e^{-\frac{2}{\hbar}\int\limits_{r_0}^{r_2} |p_r|\, dr} \tag{20.19}$$

Dieses Resultat kann man auch direkt durch die Anwendung des Erhaltungssatzes der Ladung bestätigen, indem man aus der Anschlußbedingung bei r_0 die Amplitude der Eigenfunktion im Kerninnern und durch eine Integration der Dichte über das Kerninnere die Teilchenzahl im Kern bestimmt. Das Verhältnis der Anzahl der pro Zeiteinheit ausströmenden Teilchen, die nach (20.12) gleich $4\pi/M$ ist, zu dieser Zahl ist λ; mit der Annäherung $K r_0 \gg 1$ ergibt sich wieder (20.19). Für den Exponenten erhält man

$$\int_{r_0}^{r_2} |p_r|\, dr = \frac{4(Z-2)e^2}{v}\left(\arccos\sqrt{\frac{r}{r_2}} - \sqrt{\frac{r}{r_2}}\sqrt{1-\frac{r}{r_2}}\right)\Bigg|_{r_0}^{r_2}. \tag{20.20}$$

Wenn man annehmen darf, daß $r_0 \ll r_2$, d. h. daß der Kernradius klein ist gegen die effektive Schwellendicke, so folgt

$$\int_{r_0}^{r_2} |p_r|\, dr \approx \frac{2\pi(Z-2)e^2}{v} - 4e\sqrt{M(Z-2)r_0}. \tag{20.21}$$

In die Schlußformel, die aus (20.19) und (20.21) folgt, tragen wir schließlich das für $l \neq 0$ auftretende Zusatzglied ohne Durchführung der Rechnung mit ein. Es ergibt sich

$$\lambda = \frac{4\sin^2 K r_0}{M r_0}\sqrt{2M\left[E - \frac{2(Z-2)e^2}{r_0}\right]}\, e^{-\frac{4\pi(Z-2)e^2}{\hbar v} + \frac{4}{\hbar}\sqrt{4(Z-2)Me^2 r_0 - \hbar^2 l(l+1)}}. \tag{20.22}$$

Gamow ist durch Anwendung der W.K.B.-Methode auch in der Umgebung von r_0 zu einer analogen Formel gelangt, die jedoch vor dem Exponentialglied nur den Faktor $8\pi\hbar/M r_0^2$ enthält. Das hier gegebene Verfahren ist korrekter; jedoch liegt der numerische Unterschied wohl innerhalb der Fehlergrenzen der Rechnung, und es ist daher bequem, die einfachere Gamowsche Formel anzuwenden, die numerisch lautet

$$\left.\begin{aligned} &-\log(2\cdot 10^{22}\cdot\lambda) = \log(\ln 2) + \log e\,\cdot \\ &\cdot\left[2{,}75\cdot 10^5\frac{(Z-2)}{v} - 3{,}84\cdot 10^{27}\sqrt{6\cdot 10^{-42}(Z-2)r_0 - 1{,}1\cdot 10^{-54} l(l+1)}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{20.23}$$

Hierbei ist λ in $\sec^{-1}$, r_0 in cm und v in cm/sec gemessen.

Es bleibt schließlich die Frage nach der Zuverlässigkeit dieser Formel. Die in der Rechnung gemachten Annäherungen bedingen, daß sie jedenfalls für Energien, die nahe dem oberen Rand der Schwelle liegen, merklich falsch wird. Darüber hinaus kann die Rechnung nach dem Einkörpermodell sehr wohl einen Fehler um einen Faktor der Größenordnung 10 bewirken; z. B. geht zum mindesten die Wahrscheinlichkeit dafür, daß

im Kern überhaupt α-Teilchen vorgebildet sind (vgl. § 17), als Faktor ein. Jedoch kann durch diese Unsicherheit des Modells im Kerninnern der exponentielle Charakter des Gesetzes, der auf der (durch direkte Beobachtung bestätigten) Existenz der COULOMBschen Potentialschwelle im Außenraum beruht, nicht aufgehoben werden. Daher geht jeder Faktor, der am Wert von λ angebracht wird, in den Ausdrücken für E und r_0 nur als Summand ein und ändert die aus den gemessenen λ-Werten berechneten Beträge dieser Größen wegen des sehr großen Wertes aller Zerfallszeiten nur unbeträchtlich. Man darf die Formel daher jedenfalls für alle Größenordnungsabschätzungen unbedenklich gebrauchen.

§ 21. Vergleich mit der Erfahrung

Das wichtigste empirische Gesetz über den α-Zerfall ist die GEIGER-NUTTALLsche Beziehung zwischen Lebensdauer und Zerfallsenergie der α-Strahlen, die in Tabelle 6 und Fig. 17 wiedergegeben ist. Der exponentielle Charakter dieser Beziehung ist schon durch die anschaulichen Überlegungen von § 19 verständlich; wir suchen sie nun nach Gleichung (20.22) quantitativ zu erklären.

Tabelle 6. Konstanten des α-Zerfalls

Element	Z	A	Zerfallsenergie in 10^6 Volt	Zerfallskonstante λ in $\sec^{-1}$	r_0 in 10^{-13} cm
U I	92	238	4,19	$4,8 \cdot 10^{-18}$	9,5
U II	92	234	4,75	$7,4 \cdot 10^{-14}$	(9,3)
Io	90	230	4,67	$2,6 \cdot 10^{-13}$	9,1
Ra	88	226	4,879	$1,39 \cdot 10^{-11}$	8,6
RaEm	86	222	$5,5886_7$	$2,097 \cdot 10^{-6}$	8,5
RaA	84	218	$6,1123_9$	$3,78 \cdot 10^{-3}$	8,3
RaC	83	214	$5,611_7$	$2,34 \cdot 10^{-7}$	7,5
RaC′	84	214	$7,829_{34}$	$(4 \cdot 10^5)$	(7,7)
Po	84	210	$5,403_3$	$0,57 \cdot 10^{-7}$	8,9
Th	90	232	4,06	$1,3 \cdot 10^{-18}$	8,9
RaTh	90	228	5,517	$1,16 \cdot 10^{-8}$	8,7
ThX	88	224	5,7858	$2,20 \cdot 10^{-6}$	8,5
ThEm	86	220	$6,399_5$	$1,27 \cdot 10^{-2}$	8,3
ThA	84	216	$6,903_8$	4,95	8,1
ThC	83	212	$6,200_{69}$	$6,7 \cdot 10^{-5}$	7,0
ThC′	84	212	$8,947_6$	$> 10^8$	(8,7)
Pa	91	231	5,12	$6,86 \cdot 10^{-13}$	8,2
RaAc	90	227	6,159	$4,24 \cdot 10^{-7}$	7,9
AcX	88	223	5,823	$7,06 \cdot 10^{-7}$	8,2
AcEm	86	219	6,953	$1,77 \cdot 10^{-1}$	7,7
AcA	84	215	7,508	$3,47 \cdot 10^2$	7,9
AcC	83	211	6,739	$4,79 \cdot 10^{-3}$	7,3
AcC′	84	211	7,581	$> 10^2$	8,3

λ hängt von v, Z, r_0 und l ab. Da diese sämtlichen Größen von Kern zu Kern variieren, ist es nicht selbstverständlich, daß die empirische Beziehung, in der nur λ und v berücksichtigt sind, in so guter Näherung exponentiell verläuft. Man muß daher annehmen, daß sich ebenso wie die bekannte Größe Z auch r_0 und l beim Durchlaufen einer Zerfallsreihe jeweils monoton ändern, und kann versuchen, aus den empirischen Daten auf ihre Größenordnungen und auf ihre Werte für individuelle Kerne zu schließen. Dabei müssen wir für alle diejenigen Zerfallsprozesse, bei denen Anfangs- und Endkern den Drehimpuls Null haben, $l = 0$ setzen; das dürften nach § 13 alle Kerne mit gerader Ladung und Masse, also alle nicht zwischen zwei aufeinanderfolgenden β-Strahlern liegenden

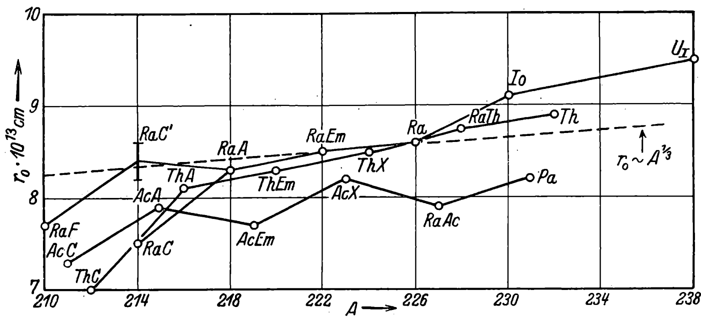


Fig. 19. Effektive Kernradien der α-Strahler.

α-Strahler der Uran- und Thoriumreihe sein. Für diese Kerne bleibt r_0 die einzige Unbekannte in Gleichung (20.23); für die übrigen Kerne wird man wegen des kleinen Faktors, mit dem $l(l+1)$ in (20.23) eingeht, beim Ansatz $l = 0$ wenigstens die richtige Größenordnung von r_0 erwarten. Die berechneten Kernradien sind (nach Gamow) in Tabelle 6 und Fig. 19 angegeben. Die Figur zeigt zugleich den Verlauf der Kernradien mit $A^{1/3}$, der nach dem Tröpfchenmodell in seiner einfachsten Form zu erwarten wäre. Die hier berechneten effektiven Radien, die — soweit das Einkörpermodell überhaupt sinnvoll ist — etwa den inneren Rand der Potentialschwelle bezeichnen, lassen sich mit den Radien des Tröpfchenmodells, die den äußeren Rand der merklichen Teilchendichte im Kern bedeuten, nicht unmittelbar vergleichen; nach § 12 scheinen die letzteren wesentlich größer zu sein. Daher ist die Lage der theoretischen Kurve in Fig. 19 nicht nach den numerischen Daten des § 12, sondern durch die Forderung der Übereinstimmung mit dem Gamowschen Radius für Radium bestimmt. Jedoch sollte der Verlauf mit $A^{1/3}$ in erster Näherung beiden

Radiensorten gemeinsam sein. Ob der stärkere Anstieg der aus (20.23) berechneten Radien mit A auf der in § 12 durch das δ-Glied in (12.6) dargestellten „Aufblasung" des Kerns infolge der wachsenden COULOMB-energie oder auf einem im Einkörpermodell nicht berücksichtigten Zug des Zerfallsvorgangs beruht, läßt sich vorläufig nicht entscheiden.

Die Abweichungen der gefundenen Radien vom mittleren Verlauf, die bei den C''-Produkten und in der Aktiniumreihe, also gerade bei den Kernen mit vermutlich von Null verschiedenen Drehimpulsen am größten sind, deuten auf die Emission von α-Teilchen mit $l \neq 0$ hin. Für eine Berechnung des Wertes von l bieten diese Abweichungen aber natürlich keine hinreichende Grundlage.

Einen deutlichen Hinweis auf das Auftreten von α-Teilchen mit endlichem Drehimpuls relativ zum Kern bietet auch die Feinstruktur der α-Strahlung, die ebenfalls gerade bei den Elementen mit anomalen Radien gefunden wurde. Sie beruht darauf (vgl. § 33), daß der Restkern nach dem Zerfall nicht immer im Grundzustand, sondern gelegentlich auch in einem angeregten Zustand zurückbleibt. Wenn nun jede der dadurch entstehenden α-Strahl-Gruppen den Drehimpuls Null hätte, so müßte zwischen ihren Emissionswahrscheinlichkeiten und Energien nach (20.22) eine normale GEIGER-NUTTALL-Beziehung gelten. Die sehr empfindliche Abhängigkeit der Zerfallskonstante von der Energie würde dann, wie GAMOW nachgerechnet hat, bewirken, daß der Übergang in den Grundzustand, bei dem der größte Energiebetrag frei wird, mit weitaus überwiegender Wahrscheinlichkeit stattfinden müßte. Das Auftreten einer beobachteten Feinstruktur ist also nur verständlich, wenn die Wahrscheinlichkeit dieses Übergangs aus irgendeinem Grund gegenüber der Übergangswahrscheinlichkeit in einen angeregten Zustand herabgesetzt ist. Das ist offenbar dann möglich, wenn der Grundzustand des Endkerns einen anderen Drehimpuls hat als der Ausgangskern und das α-Teilchen daher die volle Energiedifferenz der beiden Kerne nur gleichzeitig mit der Differenz der Drehimpulse aufnehmen kann, während der Übergang in einige angeregte Zustände mit $l = 0$ oder jedenfalls kleinerem l möglich ist. Über die Versuche zur quantitativen Durchführung dieses Gedankens vgl. § 33.

Auch bei den α-Teilchen übernormaler Reichweite, die aus angeregten Kernen emittiert werden (§ 32), läßt sich die Formel (20.23) anwenden. Sie führt dort zu einer qualitativen Kontrolle der Abschätzungen für die Emissionswahrscheinlichkeit von γ-Strahlung.

Schließlich sei hervorgehoben, daß die Gleichung (20.23) ein in § 8 und § 12 benutztes Ergebnis liefert: Kerne, deren Zerfallsenergie unter

einer gewissen Grenze liegt, haben wegen der exponentiellen Abhängigkeit der Zerfallskonstante von der Energie so lange Lebensdauern, daß ihr Zerfall nicht mehr wahrnehmbar ist. Tabelle 7 gibt für eine Reihe von Ordnungszahlen den Wert der Zerfallsenergie, die nicht überschritten werden darf, wenn die Lebensdauer des Elements größer als 10^{10} Jahre bleiben soll.

Tabelle 7. α-Zerfallsenergien, die zur Lebensdauer 10^{10} Jahre führen

Z	E
92	$3{,}9 \cdot 10^6$ Volt
65	2,7
45	1,5
25	0,55
10	0,10

2. Grundlagen der Theorie der erzwungenen Kernreaktionen

§ 22. Systematik der beobachteten Prozesse

Die Prozesse, die auftreten, wenn Kerne mit materiellen Teilchen oder elektromagnetischer Strahlung beschossen werden, fassen wir als erzwungene Kernreaktionen zusammen. Das Erfahrungsmaterial über diese Prozesse ist in den letzten Jahren sehr rasch angewachsen. Es ist dadurch notwendig und möglich geworden, die Erfahrungen systematisch zu ordnen, so daß die theoretische Erklärung sich im allgemeinen nicht auf bestimmte Einzelprozesse, sondern nur auf gewisse Typen von Prozessen zu richten braucht.

Wir führen zunächst eine kurze Bezeichnungsweise ein (nach FLEISCHMANN und BOTHE, 34), die davon ausgeht, daß jeder Prozeß durch die Angabe des Geschosses und des den Kern nach der Reaktion verlassenden Teilchens eindeutig charakterisiert ist. Statt der etwas umständlichen Schreibweise nach dem Muster der chemischen Reaktionen setzen wir zwischen das Symbol des ursprünglichen und des durch die Reaktion entstehenden Kernes in Klammern die Anfangsbuchstaben der Namen des Geschosses und des emittierten Teilchens. Daher bedeutet: $\alpha = \alpha$-Teilchen, d = Deuteron, p = Proton, n = Neutron, γ = Lichtquant, x = beliebiges materielles Teilchen. Z. B. schreiben wir die Umwandlung ${}^{14}_{7}N + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{17}_{8}O + {}^{1}_{1}H$

kurz $^{14}_{7}N$ (α, p) $^{17}_{8}O$. Für die unter γ-Emission verlaufende Reaktion $^{27}_{13}Al + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{28}_{13}Al$ schreiben wir $^{27}_{13}Al$ (n, γ) $^{28}_{13}Al$, indem wir uns um der kürzeren Bezeichnungsweise willen über die Inkonsequenz hinwegsetzen, daß die γ-Quanten dadurch gleichsam unter die Kernbestandteile eingereiht werden. γ-Strahlung, die nur als Begleiterscheinung bei einer auch strahlungslos möglichen Reaktion auftritt, wollen wir jedoch im allgemeinen nicht angeben. Den Typ der Reaktion, unabhängig von dem Kern, an dem sie sich vollzieht, bezeichnet das Klammersymbol allein, also etwa: (α, p), oder, für die elastische Streuung: (α, α). Fig. 20 zeigt als Beispiel die bisher am Kern $^{27}_{13}Al$ beobachteten erzwungenen Reaktionen; die Zahlen bedeuten die folgenden Prozesse: 1 = (n, γ), 2 = (n, p), 3 = (n, α), 4 = (p, α), 5 = (d, n), 6 = (d, p), 7 = (d, α), 8 = (α, n), 9 = (α, p).

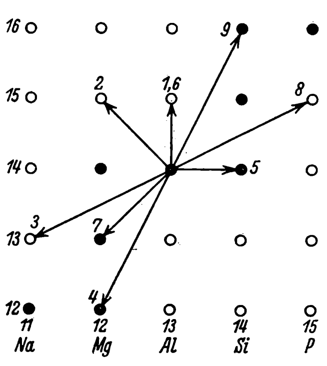


Fig. 20. Umwandlungen von $^{27}_{13}Al$ (Abszisse Z, Ordinate N).

Ob eine Reaktion überhaupt stattfinden kann und ob sie Energie verbraucht oder liefert (ob sie, in der Sprache der Chemiker, endotherm oder exotherm verläuft), hängt nach den Überlegungen des zweiten Kapitels (§ 8ff.) von den Bindungsenergien des ursprünglichen und des entstehenden Kerns ab. Wir können daher die dort zusammengestellten Kenntnisse über den Verlauf der Bindungsenergien zur Ordnung des Materials über die erzwungenen Reaktionen benutzen. Es lassen sich im wesentlichen folgende allgemeine Regeln ableiten: Reaktionen, welche dem Kern nur ein Teilchen hinzufügen, ohne ihm ein anderes Teilchen zu entreißen, also vor allem alle (x, γ)-Prozesse, und in gewissem Sinn auch (d, p) und (d, n), sind stark exotherm; ihre Umkehrprozesse sind entsprechend endotherm. Bei den übrigen Reaktionen hängt die Energieausbeute davon ab, ob sie die Teilchenzahlen Z und N aus geraden in ungerade Zahlen verwandeln oder umgekehrt. Denn z. B. werden zwar bei der Reaktion (α, p) dem Kern ebenfalls drei Teilchen eingebaut und dadurch ein beträchtlicher Energiebetrag gewonnen; dafür muß aber das α-Teilchen aufgelöst werden und die dafür notwendige Energie überwiegt die gewonnene Energie im allgemeinen nur dann nicht, wenn durch den Einbau der drei Teilchen im Kern eine vorher unvollendete Zweierschale ausgefüllt werden kann. Diese Regeln bestätigen sich allgemein in der Erfahrung, wenn sie auch zur quantitativen Voraussage der Energieausbeuten nicht ausreichen.

Nicht alle energetisch möglichen Prozesse kommen tatsächlich vor. In dieser Hinsicht besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen den durch Neutronen und den durch geladene Teilchen ausgelösten Prozessen. Neutronen lösen Umwandlungen an sehr zahlreichen, vielleicht an allen Kernen aus, mit Wirkungsquerschnitten, die bei großer Anfangsgeschwindigkeit der Neutronen von der Größenordnung der geometrischen Kernquerschnitte (10^{-25} bis 10^{-24} cm^2) sind und für kleine Anfangsgeschwindigkeiten im allgemeinen größer werden, für einige wenige Kerne bis zum zehntausendfachen des geometrischen Querschnitts. Geladene Teilchen erzeugen Umwandlungen nur an den leichteren Kernen; die Wirkungsquerschnitte erreichen für sehr schnelle Teilchen in einigen Fällen ebenfalls die geometrischen Kernquerschnitte, nehmen aber mit sinkender Geschwindigkeit des stoßenden Teilchens exponentiell ab. Über diesen Verlauf lagern sich für Neutronen wie für geladene Teilchen erhöhte Wirkungsquerschnitte bei bestimmten Energiewerten (Resonanzen). Der einzige Prozeß, der auch bei sehr langsamen geladenen Teilchen noch auftritt, ist die elastische Streuung, die wir im § 24 gesondert behandeln.

Wir geben nun eine Übersicht der erzwungenen Umwandlungen. Bei jedem Reaktionstyp sind nur die Eigenschaften aufgeführt, die ihn von den übrigen Prozessen unterscheiden; soweit keine besondere Angabe gemacht ist, gelten also die obengenannten allgemeinen Regeln.

(α, d). Scheint nur in einem einzigen Fall beobachtet zu sein (75). Daß das Deuteron als unzerlegter Kernsplitter auftritt, ist wegen seiner geringen Stabilität in der Tat unwahrscheinlich.

(α, p). An diesem Prozeß wurde die künstliche Kernumwandlung durch RUTHERFORD und CHADWICK entdeckt. Er ist energetisch besonders günstig, wenn der Ausgangskern ungerades Z und gerades N hat, da er zur Erhöhung von Z um eine, von N um zwei Einheiten führt.

(α, n). Bei diesem Prozeß wurde das Neutron entdeckt. Er ist energetisch günstig bei Kernen mit geradem Z und ungeradem N.

(α, γ). Nicht beobachtet. Da der Prozeß an sich mit großer Energieausbeute möglich sein sollte, muß die Erklärung in der geringen Emissionswahrscheinlichkeit der γ-Strahlung liegen (§ 34). Einfangung ohne Emission einer Strahlung ist (§ 4) nach den Erhaltungssätzen unmöglich.

(d, α). Energetisch günstig bei Kernen mit ungeradem Z und ungeradem N. ($^{6}_{3}$Li, $^{10}_{5}$B, $^{14}_{7}$N).

(d, p). Gleichwertig mit der Anlagerung eines Neutrons an den Kern, daher energetisch stets sehr günstig, vor allem bei anfangs ungeradem N.

Der Wirkungsquerschnitt ist für kleine Deuteronenenergien größer, als man nach dem Exponentialgesetz erwartet; die Erklärung dürfte in der leichten Ablösbarkeit des Neutrons vom Proton liegen (§ 31).

(d, n). Gleichwertig mit der Anlagerung eines Protons an den Kern, daher energetisch stets sehr günstig, vor allem bei anfangs ungeradem Z.

(d, γ). Nicht beobachtet. Vgl. (α, γ).

(p, α). Dieser Prozeß war die erste Kernumwandlung durch künstlich beschleunigte Teilchen. Er ist energetisch günstig bei ungeradem Z und geradem N. In einem gut untersuchten Einzelfall [${}^{7}_{3}$Li (p, α) ${}^{4}_{2}$He] ist der Absolutwert des Wirkungsquerschnitts unerwartet klein (vgl. § 31).

(p, d). Nicht beobachtet. Vgl. (α, d).

(p, n). Nicht beobachtet. Da die Wirkung dieses Prozesses, die Ersetzung eines Neutrons im Kern durch ein Proton, auch durch β-Zerfall spontan eintreten kann, wenn sie überhaupt energetisch günstig ist, kann der Prozeß an Kernen, die als stabil bekannt sind, jedenfalls nur unter Energiezufuhr stattfinden; dies erklärt sein Nichtauftreten bei den geringen Primärenergien der verfügbaren Protonen.

(p, γ). Mit verhältnismäßig geringer Ausbeute bei bestimmten Resonanzenergien beobachtet (vgl. § 34).

(n, α). Energetisch günstig bei geradem Z und ungeradem N, aber auch bei einer großen Zahl anderer Elemente gefunden.

(n, d). Nicht beobachtet. Vgl. (α, d).

(n, p). Wird nur von Neutronen großer Primärenergie ausgelöst. Die Erklärung liegt darin, daß er — analog zum Prozeß (p, n) — durch β^{+}-Zerfall spontan stattfinden wird, wenn er überhaupt exotherm ist. Dementsprechend sind die Folgeprodukte, die durch ihn aus stabilen Kernen hergestellt werden, ohne Ausnahme β^{-}-labil.

(n, γ). Bei allen Kernen energetisch sehr günstig.

(γ, α), (γ, d). Nicht beobachtet, was durch das Zusammenwirken seines stark endothermen Charakters und der relativ geringen Wechselwirkung von γ-Strahlung mit Kernen verständlich ist (§ 34).

(γ, p). Beobachtet als Zerlegung des Deuterons durch γ-Strahlen.

(γ, n). Zweimal beobachtet. Vgl. § 35.

Im folgenden (§§ 23—34) fassen wir die allgemeinen Regeln genauer und suchen für sie wie für die eben aufgezählten Sondergesetzmäßigkeiten eine quantenmechanische Erklärung anzugeben.

§ 23. Übersicht über die Modellvorstellungen

Alle erzwungenen Kernreaktionen haben zur Voraussetzung, daß das auslösende Teilchen ins Innere oder jedenfalls in die nächste Nachbarschaft des Kerns gelangt. Sie alle führen ferner — mit der Ausnahme der elastischen Streuung — zu einer dauernden Änderung der inneren Struktur des Kerns; und auch die elastische Streuung wird in manchen Fällen durch eine vorübergehende Strukturänderung des Kerns bedingt sein. Die Theorie stellt sich die Aufgabe, die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen möglichen Kernreaktionen zu bestimmen. Sie muß daher zunächst ermitteln, wie wahrscheinlich es ist, daß ein von außen kommendes Teilchen in den Kern eindringt, und dann, wie wahrscheinlich es ist, daß ein in den Kern eingedrungenes Teilchen die gesuchte Reaktion verursacht. Das Produkt dieser beiden Wahrscheinlichkeiten wird das Maß für die Gesamtwahrscheinlichkeit des Prozesses sein. Man darf aber bei dieser Überlegung nicht ohne weiteres annehmen, daß die beiden Teilwahrscheinlichkeiten voneinander unabhängig seien; vielmehr ist es durchaus möglich, daß die Wahrscheinlichkeit für das Eindringen eines Teilchens in den Kern wesentlich davon abhängt, ob es im Kerninnern einen bestimmten Prozeß auslösen kann oder nicht. Eine strenge quantenmechanische Behandlung des Gesamtsystems, das durch den ursprünglichen Kern und das stoßende Teilchen gebildet wird, würde dieser Koppelung der verschiedenen Teile des Prozesses untereinander automatisch Rechnung tragen. Da eine derartige Rechnung aber undurchführbar kompliziert wäre, ist es die erste Aufgabe der Theorie, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen der Prozeß des Eindringens in den Kern unabhängig von dem dort ausgelösten Prozeß betrachtet werden darf, oder (soweit dies nicht erlaubt ist) welche einfache Darstellung einer solchen Abhängigkeit möglich ist. Wir diskutieren diese Frage im folgenden im Anschluß an eine vor kurzem erschienene Arbeit von Bohr (13).

Es bestehen wesentliche Unterschiede zwischen der Auslösung von Kernreaktionen durch schnelle und durch langsame Teilchen, und im Fall der langsamen Teilchen wieder zwischen der Auslösung durch geladene Teilchen und durch Neutronen.

Schnell nennen wir diejenigen Teilchen, deren ursprüngliche kinetische Energie wenigstens von derselben Größenordnung ist wie die potentielle Energie, unter deren Einfluß sie beim Durchfliegen des Kerns stehen. Für die geladenen Teilchen, die zunächst die Coulombsche Potentialschwelle (Fig. 18) überwinden müssen, ehe sie das Kerninnere erreichen,

hängt es nach dieser Definition von der Ordnungszahl des umzuwandelnden Kerns ab, ob man sie als schnell bezeichnen darf; beispielsweise überwinden die von radioaktiven Kernen emittierten α-Teilchen den Potentialberg der leichtesten Kerne ohne beträchtliche Ablenkung, während sie bei der Streuung an den schweren Kernen (vgl. § 19) nicht einmal das Gebiet erreichen, in dem das Kernpotential von der COULOMBschen Form abzuweichen beginnt. Dagegen steht ein Neutron in der Hauptsache nur unter dem Einfluß des anziehenden Potentials im Kerninnern, das nach dem zweiten Kapitel von der Größenordnung der Bindungsenergie pro Teilchen und daher ziemlich unabhängig von den Teilchenzahlen im betrachteten Kern ist. „Schnelle" Neutronen sind daher allgemein die bei künstlichen Umwandlungen freigemachten Neutronen mit einer kinetischen Energie von einigen Millionen Volt; „langsame" Neutronen stellt man nach FERMI (3) her, indem man die schnellen Neutronen durch wasserstoffhaltige Substanzen schickt, in denen sie, bei den zahlreichen Stößen an Protonen, pro Stoß durchschnittlich die Hälfte ihrer kinetischen Energie verlieren und so teilweise bis zu den thermischen Geschwindigkeiten herab (Energie bei Zimmertemperatur $^1/_{30}$ Volt) verlangsamt werden. —

Um zu praktisch brauchbaren Modellvorstellungen zu kommen, untersuchen wir den Verlauf einer erzwungenen Umwandlung zunächst an dem prinzipiell einfachsten Fall der Umwandlung durch schnelle Teilchen. Man darf annehmen, daß für schnelle Teilchen die Eindringwahrscheinlichkeit nicht wesentlich von der Art und Wahrscheinlichkeit der im Kern eintretenden Prozesse abhängt. Denn Kräfte, die imstande wären, ein schnelles Teilchen aus seiner ursprünglichen, geradlinigen Bahn wesentlich abzulenken, treten (nach unserer Definition des schnellen Teilchens) erst auf, wenn es den Kern bereits erreicht hat. Es ist wichtig, zu bemerken, daß diese Überlegung auch durch die Berücksichtigung des Wellenbildes nicht wesentlich modifiziert wird. Nach dem Wellenbild darf der Begriff der Teilchenbahn nicht mehr verwendet werden, wenn es sich um die Verfolgung von Vorgängen in Lineardimensionen handelt, die kleiner sind als die de Broglie-Wellenlänge des Teilchens. Nun ist die Wellenlänge schneller Teilchen nie merklich größer als der Kernradius. Denn definitionsgemäß ist ihre kinetische Energie von derselben Größenordnung wie die potentielle Energie im Kern, also auch wie die mittlere kinetische Energie eines im Kern durch diese potentielle Energie gebundenen Teilchens; die Kerndimensionen sind aber nach der Unbestimmtheitsrelation eben von der Größenordnung der de Broglie-Wellenlänge eines im Kern

gebundenen schweren Teilchens (vgl. § 5). Somit ist die Unschärfe, mit der die Bahn eines schnellen Teilchens noch lokalisiert werden darf, von der Größenordnung der Kernradien. Man wird daher den Bahnbegriff zu einer Abschätzung der Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein schnelles Teilchen den Kern überhaupt trifft, gerade noch verwenden dürfen, während allerdings eine Voraussage über das weitere Verhalten des Teilchens im Kern auf Grund der klassischen Bahnvorstellung vollkommen versagen muß.

Wir setzen demnach die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein vorgegebenes schnelles Teilchen in einen Kern eindringt, größenordnungsmäßig gleich der Wahrscheinlichkeit, daß seine geradlinig gedachte Bahn das Kernvolumen durchsetzt; der „Wirkungsquerschnitt für das Eindringen eines schnellen Teilchens in den Kern" ist etwa gleich dem geometrischen Kernquerschnitt. Nun lehrt die Erfahrung, daß auch die totalen Wirkungsquerschnitte für die künstliche Umwandlung durch schnelle Teilchen von dieser Größenordnung sind. Das muß bedeuten, daß ein Teilchen, das sich einmal im Kern befindet, fast mit Sicherheit (zum mindesten mit einer Wahrscheinlichkeit der Größenordnung $\frac{1}{2}$) einen Umwandlungsprozeß auslöst. Man kann in dieser Tatsache die empirische Bestätigung der Vermutung sehen, daß die Bewegung des stoßenden Teilchens im Kern nicht als Bewegung in einem festen, nur von seinem Abstand vom Kernschwerpunkt abhängigen Potential („Einkörpermodell", vgl. § 18) behandelt werden darf. Denn das Bild des festen Potentials enthält eben diejenige Wechselwirkung mit einzelnen Teilchen im Kern nicht, die zur Übertragung der Stoßenergie nicht an den Kernschwerpunkt, sondern an einen bestimmten Kernbaustein, d. h. zum Zustandekommen des Umwandlungsprozesses notwendig ist.

Diese Unrichtigkeit des Einkörpermodells, für die wir in § 18 theoretische Gründe angegeben haben, dürfte zur Erklärung der großen Umwandlungswahrscheinlichkeit sogar hinreichen. Denn einerseits besitzen wir (wenn wir von der noch ungenügend bekannten Wechselwirkung der Höhenstrahlung mit Kernen absehen) keine Geschosse, deren kinetische Energie sehr groß gegen die potentielle Energie im Kern wäre; jedes Geschoß, das in den Kern eindringt, wird dort daher zum mindesten eine große Richtungsänderung erfahren. Andererseits bedeutet aber die Unrichtigkeit des Einkörpermodells eben, daß diese Richtungsänderung nicht durch eine einheitliche Impulsübertragung auf den Kernschwerpunkt, sondern durch eine individuelle Wechselwirkung mit einzelnen Kernbausteinen zustande kommt, und diese nehmen bei einem Stoß mit großer Richtungsänderung des Geschosses einen mit seiner anfänglichen

kinetischen Energie vergleichbaren Energiebetrag auf, da ja ihre Masse von derselben Größenordnung ist wie die des Geschosses.

Es ist also zu erwarten, daß das Geschoß schon beim einmaligen Durchfliegen des Kerns einen beträchtlichen Bruchteil seiner Energie an einen Kernbaustein abgibt. Andererseits braucht es ihm im allgemeinen nicht seine gesamte Energie zu übertragen, und in sehr vielen Fällen wird sich nach dem Stoß ein Zustand ergeben, in dem zwei angeregte Teilchen im Kern vorhanden sind (das Geschoß und der gestoßene Kernbaustein), die nun beide nicht genug Energie haben, um den Kern zu verlassen. Es wird vielmehr von dem Mechanismus der Übertragung des von dem Geschoß mitgebrachten Energiebetrages an weitere Kernbausteine abhängen, ob schließlich das Geschoß selbst (bzw. ein ihm gleichartiges Teilchen) oder ein Teilchen anderer Sorte die gesamte Energiesumme übernimmt und den Kern verläßt, oder ob der Kern in der Zwischenzeit unter Emission von γ-Strahlung in einen tieferen Zustand übergeht.

Die Anwendung dieser Vorstellung auf die wirklichen Umwandlungsprozesse wird allerdings dadurch komplizierter gemacht, daß die angeregten Zustände der Kerne quantisiert sind und daher nicht Teilchen jeder beliebigen kinetischen Energie imstande sind, den Kern in den geschilderten angeregten Zwischenzustand zu bringen (vgl. § 26).

Immerhin lassen sich nun zur weiteren Diskussion der Erfahrungen zwei Modellvorstellungen einander gegenüberstellen: Nach dem Einkörpermodell kann man das stoßende Teilchen als de Broglie-Welle in einem festen Potential behandeln. Die elastische Streuung läßt sich in diesem Modell unmittelbar berechnen. Für die Umwandlungswahrscheinlichkeit liefert es nun den ersten Faktor, die Eindringwahrscheinlichkeit; die Wahrscheinlichkeit für das tatsächliche Eintreten der Umwandlung, nachdem das Teilchen eingedrungen ist, muß nach anderen Methoden abgeschätzt werden, wenn man sich nicht damit begnügen will, sie nach den Erfahrungen an schnellen Teilchen in erster roher Näherung gleich eins zu setzen. Der Fehler dieser Methode beruht darauf, daß sie die Abhängigkeit der Eindringwahrscheinlichkeit von der Möglichkeit der Kernanregung und -umwandlung nicht berücksichtigt. — Das schematisierte Mehrkörpermodell behandelt den Kern nicht als festes Potential, sondern als ein System, das Energie aufnehmen und dadurch in einen „quasistationären" angeregten Zustand übergehen kann; die elastische Streuung und die Umwandlung erscheinen dann als gleichberechtigte spontane Übergänge aus diesem Zwischenzustand in verschiedene Endzustände. Die Schwäche dieses Modells liegt darin, daß eine quantitative

Ableitung der für seine Anwendung nötigen Bestimmungsstücke (Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den verschiedenen Zuständen) praktisch unmöglich ist. Wir werden daher soweit wie möglich das Einkörpermodell verwenden und nur wo seine Ergebnisse qualitativ falsch werden, Hilfsbetrachtungen nach dem Mehrkörpermodell anstellen. —

Wir schließen mit einer Übersicht über die Arten der Anwendung dieser Modelle auf die Erfahrung. Für schnelle Teilchen ist, wie wir gesehen haben, der Wirkungsquerschnitt für Umwandlungen im allgemeinen bis auf Faktoren der Größenordnung $\frac{1}{2}$ durch den geometrischen Kernquerschnitt gegeben. Eine Berechnung von Wirkungsquerschnitten, die solche Faktoren noch auszurechnen gestattet, ist bis jetzt überhaupt unmöglich; nur in einigen Fällen (wie z. B. den im vierten Abschnitt dieses Kapitels behandelten Strahlungsvorgängen) läßt sich abschätzen, daß die Wahrscheinlichkeit des Prozesses, nachdem das Teilchen eingedrungen ist, um einige Größenordnungen kleiner als eins sein kann. Alle übrigen Rechnungen über die Eigenschaften von Kernreaktionen beziehen sich auf das Verhalten langsamer Teilchen.

Für langsame Teilchen wird die Eindringwahrscheinlichkeit in doppelter Weise modifiziert. Einerseits ist nun auch der Verlauf der verhältnismäßig schwachen Kräfte in größeren Kernabständen wichtig. Andererseits tritt der Wellencharakter des Bewegungsvorgangs deutlicher hervor; denn die Wellenlänge von Teilchen, deren kinetische Energie E geringer ist als die Bindungsenergien E_0 der Kernbausteine, ist im Verhältnis $\sqrt{E_0/E}$ größer als die Kerndimensionen, und nach den aus der Optik bekannten Gesetzen der Wellenstreuung kann ein störendes Zentrum, wie es das Kernpotential darstellt, die Form der Welle in einem Gebiet von den Lineardimensionen der Wellenlänge vollständig verändern. Diese Tatsache wirkt sich wesentlich verschieden aus für geladene Teilchen und für Neutronen.

Langsame geladene Teilchen könnten nach der klassischen Mechanik das Kerninnere wegen des hohen COULOMBschen Abstoßungspotentials gar nicht erreichen. Nach der Wellenmechanik muß dagegen, in genauer Umkehrung der Verhältnisse beim α-Zerfall, auch bei kleinen Energien die Wellenfunktion mit sehr geringer Amplitude noch ins Kerninnere eindringen. Man findet durch dieselben Überlegungen wie in § 19, daß die Intensität der Wellenfunktion im Kerninnern (d. h. die Wahrscheinlichkeit des Eindringens) exponentiell mit zunehmender Dicke der zu durchsetzenden Schwelle, d. h. mit zunehmender Ordnungszahl des beschossenen Kerns oder abnehmender Energie des Geschosses abnehmen muß.

Dies ist die für die Wirkungsquerschnitte empirisch gefundene Gesetzmäßigkeit. Genau wie beim α-Zerfall ist hier das Einkörpermodell in erster Näherung anwendbar, weil sein Fehler, selbst wenn er den Wirkungsquerschnitt um erhebliche Faktoren verfälscht, den exponentiellen Verlauf, der aus der empirisch gesicherten Gültigkeit des COULOMBschen Gesetzes im Außenraum folgt, nicht wesentlich beeinflussen kann.

Dagegen werden langsame Neutronen durch keine Potentialschwelle am Eindringen in den Kern verhindert. Sie zeigen daher im allgemeinen Wirkungsquerschnitte von ähnlicher Größenordnung wie die schnellen Neutronen. In einigen Fällen treten aber Wirkungsquerschnitte bis zum zehntausendfachen der geometrischen Kernquerschnitte auf. Dies ist aus dem Wellenbild qualitativ verständlich; der Wirkungsquerschnitt kann so groß werden wie der Querschnitt in der Wellenfront, in dem die ψ-Funktion durch die Anwesenheit des Kerns merklich gestört wird, d. h. von der Größenordnung des Quadrats der de Broglie-Wellenlänge, die ihrerseits mit abnehmender Teilchengeschwindigkeit gegen Unendlich strebt. Es hängt aber von gewissen Resonanzphänomenen ab, wann eine derartige Störung der Wellenfunktion eintritt; diese Frage besprechen wir zusammen mit den Resonanzerscheinungen bei geladenen Teilchen in den §§ 25—26.

Hiermit sind, abgesehen von den Verhältnissen bei der elastischen Streuung und den Resonanzphänomenen, die Gesetzmäßigkeiten der erzwungenen Umwandlungen qualitativ dargestellt; die quantitative Theorie des dritten Abschnitts ist eine Durchführung der hier entwickelten Ansätze.

§ 24. Gesetzmäßigkeiten der elastischen Streuung

Die elastische Streuung ist die einzige Kernreaktion, die schon ohne die Berücksichtigung der individuellen Wechselwirkung zwischen dem Geschoß und einzelnen Kernbausteinen verstanden werden kann; ihre Deutung bildet daher das Muster der theoretischen Behandlung von Kernreaktionen nach dem Einkörpermodell. Außerdem ist sie der einzige Prozeß, bei dem sehr genaue Untersuchungen über die Anzahl emittierter Teilchen als Funktion des Winkels zwischen Einfalls- und Emissionsrichtung vorliegen. Wir stellen zunächst drei Regeln über sie zusammen, die in dieser Schärfe zunächst nur theoretisch abgeleitet sind, aber als Zusammenfassung aller gesicherten Erfahrungen gelten können.

1. Die Winkelverteilung elastisch gestreuter N e u t r o n e n ist kugelsymmetrisch (d. h. unabhängig von der Einfallsrichtung). Bei der Streuung

an leichten Kernen gilt diese Regel allerdings nicht für die tatsächlich beobachtete Verteilung, sondern nur wenn man die Streuwinkel in demjenigen gleichförmig bewegten Koordinatensystem mißt, in dem der Schwerpunkt des Systems Kern plus Neutron ruht; nur für schwerere Kerne fällt dieser Schwerpunkt innerhalb der Meßgenauigkeit mit dem Kernschwerpunkt zusammen.

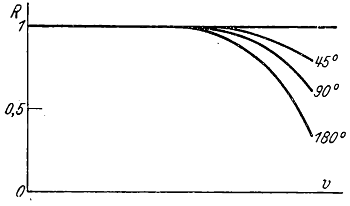


Fig. 21. R = Verhältnis der wirklichen Streuintensität geladener Teilchen zu der aus dem RUTHERFORDschen Gesetz folgenden als Funktion der Teilchengeschwindigkeit. (Theoretische Kurven nach MOTT, 71.)

2. Langsame geladene Teilchen werden nach dem RUTHERFORDschen Gesetz gestreut, das die Winkelverteilung der im Feld eines Massenpunkts vorgegebener elektrischer Ladung gestreuten Teilchen angibt [vgl. Gl. (30.8)]. Für schnellere Teilchen treten Abweichungen von diesem Gesetz auf, und zwar setzen sie für alle Streuwinkel bei nahezu derselben kinetischen Energie des stoßenden Teilchens ein (Fig. 21).

3. Die Abweichung besteht zunächst stets in einer Verminderung der Streuintensität gegen den RUTHERFORDschen Wert; bei weiter wachsender Energie des einfallenden Teilchens erfolgt aber eine Vermehrung, die in einigen Fällen den RUTHERFORDschen Wert weit überschreitet (vgl. Fig. 22).

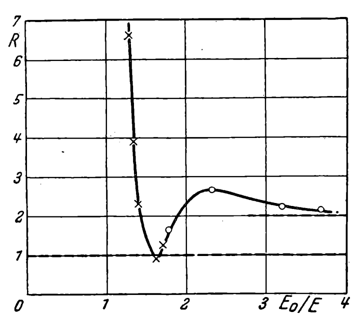


Fig. 22. Verhältnis der gemessenen Streuintensität zur RUTHERFORDschen für die Streuung von α-Teilchen an Helium unter 45° gegen die Einfallsrichtung; nach MOTT (71). (Abszisse reziproke Energie.)

Über zwei Sonderfälle vgl. die Regeln 4 und 5 weiter unten. —

Daß die Regeln für die Winkelverteilung in dem Koordinatensystem gelten, in dem der Gesamtschwerpunkt ruht (im „Schwerpunktssystem"; auch das RUTHERFORDsche Gesetz hat in diesem System seine einfachste Form), ist theoretisch unmittelbar verständlich. Denn das Stoßproblem ist, selbst wenn man von der inneren Struktur des gestoßenen Kerns absieht, zunächst stets ein Zweikörperproblem und wird auf ein Einkörperproblem erst durch die Abseparation der Schwerpunktsbewegung reduziert; da die potentielle Energie, welche die Streuung bewirkt, nicht von den Absolutkoordinaten des Geschosses, sondern von seinen Koordinaten relativ zum Kern abhängt, gelten auch alle

einfachen Folgerungen aus dem Einkörpermodell nur für diese Relativkoordinaten.

Die Kugelsymmetrie der Winkelverteilung im Schwerpunktsystem würde aus dem klassischen Korpuskelbild des Streuvorganges nur bei einem speziellen, der Wirklichkeit widersprechenden Kraftgesetz zwischen Neutron und Kern (Stoß starrer Kugeln ohne Anziehungskräfte) folgen. Nach der Wellenmechanik ist sie dagegen stets zu erwarten, solange die Wellenlänge groß ist gegen die Kerndimensionen, also jedenfalls für langsame Neutronen. Man kann nämlich jeden Punkt eines im Wellenzug der einfallenden Neutronen befindlichen Potentials analog zum HUYGENSschen Prinzip der Optik als Ausgangspunkt einer sekundären Kugelwelle auffassen. Die Bevorzugung bestimmter Streurichtungen rührt dann — genau wie in der optischen Beugungstheorie — davon her, daß die Phasendifferenz zwischen den Streuwellen, die von räumlich getrennten Punkten dieses Potentials ausgehen, für verschiedene Fortpflanzungsrichtungen verschieden ist und die Welle dadurch in gewissen Richtungen verstärkt, in anderen ausgelöscht wird. Wenn aber der Abstand zwischen allen streuenden Punkten klein ist gegen die Wellenlänge der einfallenden Strahlung, so tritt keine merkliche Phasendifferenz zwischen den verschiedenen sekundären Kugelwellen auf; also bleibt auch die totale Streuwelle kugelsymmetrisch.

Für schnelle Neutronen sind demnach Abweichungen von der Kugelsymmetrie zu erwarten; jedoch liegen hinreichende experimentelle Daten hierüber noch nicht vor. WICK (vgl. 52) hat darauf aufmerksam gemacht, daß die Asymmetrie der Streuung schneller Neutronen an Protonen darüber Auskunft geben müßte, ob die Kraft zwischen Neutron und Proton den Austauschcharakter hat. Die Theorie zeigt nämlich, daß bei schnellen Stößen stets das stoßende Teilchen die kleinen Ablenkungswinkel bevorzugt. Herrscht zwischen Neutron und Proton eine „gewöhnliche" Kraft, so müßten daher die ankommenden schnellen Neutronen unter kleinen Winkeln gegen die Einfallsrichtung (und folglich nach dem Impulssatz die gestoßenen Protonen unter großen Winkeln) weiterfliegen. Ist der Wechselwirkungsakt dagegen mit einem Ladungsaustausch verbunden, so müßten umgekehrt die Protonen (in welche sich die Neutronen beim Stoß verwandelt haben) unter kleinen und die Neutronen (die vorher Protonen waren) unter großen Winkeln bevorzugt auftreten. Nach BETHE und PEIERLS (9) ist aber eine beträchtliche Asymmetrie bei diesem Prozeß erst bei Primärenergien von etwa 40 Millionen Volt zu erwarten.

Die zweite Regel ist gleichsam nur die Übersetzung der ersten Regel in die komplizierteren Verhältnisse bei geladenen Teilchen. Das Coulombfeld streut auch bei sehr großen Wellenlängen der einfallenden Teilchen nicht kugelsymmetrisch, weil sein Abfall nach außen so langsam ist, daß seine räumliche Ausdehnung nie als klein gegen die Wellenlänge angesehen werden darf (nach § 30 wird auch die asymptotische Form der Welle im Unendlichfernen durch ein Coulombfeld abgeändert). Zur Erklärung des gleichzeitigen Eintretens der „anomalen" (nicht-RUTHERFORDschen) Streuung bei allen Streuwinkeln denken wir uns nach MOTT (vgl. 71) das wirkliche Kernpotential (Fig. 18) additiv zusammengesetzt aus dem Coulombpotential und einem negativen Potential, das gleich der Differenz des wirklichen und des Coulombschen Potentials ist. Dieses Zusatzpotential erstreckt sich ebenso wie das Potential, das auf Neutronen wirkt, nur über ein Gebiet von Kerngröße. Wenn die Energie der stoßenden Teilchen so groß ist, daß ihre Wellenfunktion mit merklicher Intensität in dieses Gebiet eindringen kann, und wenn andererseits dann ihre Wellenlänge noch groß ist gegen den Kernradius, so wird das Zusatzpotential genau wie im Fall der Neutronen eine kugelsymmetrische Streuwelle emittieren, die im Sinne des HUYGENSschen Prinzips der Streuwelle des Coulombfeldes additiv überlagert wird. Da nicht die Intensitäten, sondern die Amplituden der Streuwellen addiert werden, ist die Differenz der wirklichen Streuintensität gegen die RUTHERFORDsche nicht in allen Richtungen gleich groß; immerhin tritt die Störung, wie Regel 2 fordert, unter allen Streuwinkeln bei derselben Energie der stoßenden Teilchen zum erstenmal auf.

Das Zusatzpotential hat das dem Coulombfeld entgegengesetzte Vorzeichen. Die von ihm emittierte Streuwelle hat daher die zu der vom Coulombpotential erzeugten Streuwelle entgegengesetzte Schwingungsphase, und die gesamte Streuamplitude wird daher zunächst vermindert. Bei sehr hohen Teilchenenergien überwiegt aber schließlich die Streuwelle des Zusatzpotentials; die gesamte Streuamplitude hat dann die entgegengesetzte Phase wie vorher und die Intensität nimmt von nun an wieder zu. Damit ist auch die dritte Regel erklärt. —

Wir fügen noch zwei Phänomene an, die aus dem Rahmen der übrigen Erfahrungen über elastische Streuung fallen, aber eine einfache quantenmechanische Erklärung besitzen:

4. Bei der Streuung von α-Teilchen in Helium und Protonen in Wasserstoff treten schon bei sehr kleinen Geschwindigkeiten Abweichungen vom RUTHERFORDschen Streugesetz auf, die nicht als Wirkungen des

Kerninneren aufgefaßt werden können (nach Fig. 22 ist z. B. unter 45° das Verhältnis der gemessenen Streuintensität von α-Teilchen zur RUTHERFORDschen im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten gleich zwei).

5. Neutronen zeigen überhaupt keine beobachtbare Streuwechselwirkung mit Elektronen; nach DEE (23) durchsetzt ein Neutron 300 cm Luft, ohne ein Elektron aus seinem Atomverband zu reißen.

Die unter 4. genannten Anomalien beruhen nach MOTT (72) darauf, daß das stoßende Teilchen in beiden Fällen physikalisch identisch mit dem gestoßenen Kern ist. Die Ununterscheidbarkeit der beiden Teilchen bewirkt einen wellenmechanischen Resonanzeffekt, der eine Abweichung von der klassischen RUTHERFORDschen Formel zur Folge hat. Die Formel von MOTT ist in (30.22) angegeben; da der Effekt keinen Aufschluß über die Kernstruktur liefert, verzichten wir hier auf seine nähere Diskussion.

Aus der geringen Streuwechselwirkung zwischen Neutron und Elektron folgt nach BOHR (vgl. 71) nicht, daß zwischen den beiden Teilchen nur eine geringe potentielle Energie vorhanden wäre. Eine einfache Rechnung ergibt nämlich, daß — Gleichheit der Kräfte in beiden Fällen vorausgesetzt — die Amplitude der Streuwelle beim Stoß eines Neutrons mit einem Elektron um den Faktor m/M kleiner ist als beim Stoß mit einem Proton; die Streuintensitäten verhalten sich also wie $(m/M)^2$. Anschaulich rührt dies davon her, daß man den Vorgang wiederum in dem Koordinatensystem betrachten muß, in dem der Schwerpunkt beider Teilchen ruht, und daß in diesem System ein Elektron eine um M/m größere Wellenlänge hat als ein Proton gleicher kinetischer Energie. Für das Elektron ist das Potentialhindernis also gleichsam 1840mal kleiner als für das Proton, und seine Wellenfunktion wird dementsprechend weniger modifiziert. Das Problem steht in genauer Analogie zur RAYLEIGHschen Streuung des Lichtes an kleinen Hindernissen, bei der die Streuintensität ebenso wie hier umgekehrt proportional zur vierten Potenz der Wellenlänge ist (die DE BROGLIE-Wellenlänge ist ja $\lambda = \hbar/\sqrt{2mE}$).

§ 25. Resonanzphänomene. Diskussion nach dem Einkörpermodell

Gelegentlich treten bei bestimmten Geschoßenergien ungewöhnlich hohe Wirkungsquerschnitte auf. Wir fassen zunächst in einigen Regeln die Erfahrungen über derartige Prozesse zusammen.

1. Geladene Teilchen. Der experimentellen Abnahme der Wirkungsquerschnitte mit der Geschoßenergie sind bei manchen Prozessen

Maxima für bestimmte Energiewerte überlagert (vgl. Fig. 26, 31); die Prozesse (p, γ) scheinen sogar nur für feste Energiewerte der Protonen aufzutreten (§ 34). Diese „Resonanzenergien" sind dabei allerdings im allgemeinen nur bis auf etwa ein Zehntel ihres eigenen Betrages bestimmt.

2. Neutronen. a) Größe der Wirkungsquerschnitte. Einige Elemente zeigen für langsame Neutronen Wirkungsquerschnitte, die erheblich größer als die geometrischen Kernquerschnitte sind und die Größenordnung 10^{-20} cm², d. h. 10000 Kernquerschnitte erreichen; die Verteilung dieser Elemente im periodischen System zeigt Fig. 23.

b) Art der eintretenden Prozesse. Sehr große Wirkungsquerschnitte sind nachgewiesen für die Einfangung eines Neutrons unter γ-Emission (n, γ) und unter Emission eines α-Teilchens (n, α). Ob elastische Streuquerschnitte ähnlicher Größenordnung vorkommen, ist experimentell noch nicht sichergestellt; jedenfalls sind für einige Elemente die Streuquerschnitte wesentlich kleiner als die Einfangquerschnitte.

c) Abhängigkeit der Wirkungsquerschnitte von der Neutronenenergie. Die großen Wirkungsquerschnitte scheinen bei einigen Prozessen, vor allem (n, α), umgekehrt proportional zur Neutronengeschwindigkeit zu sein. Bei den meisten Prozessen zeigen sich aber extrem hohe Wirkungsquerschnitte in ganz bestimmten Energieintervallen, deren Schwerpunkte in dem Energiegebiet zwischen den thermischen Energien ($\sim {}^1/_{30}$ Volt) und vielleicht einigen 100 Volt liegen, und deren Breiten sehr verschieden, in manchen Fällen aber nicht größer als ca. 0,1 Volt sind. —

Das Auftreten von Resonanzen für geladene Teilchen folgt unmittelbar aus der Gültigkeit eines Potentialgesetzes der in Fig. 18 angedeuteten Form. Mit Hilfe der Überlegung vom Anfang des § 20, die auf unseren Fall wörtlich übertragen werden kann, beweist man, daß die Wellenfunktion eines einfallenden geladenen Teilchens im Kerninnern fast immer sehr klein gegen die Wellenfunktion im Außenraum ist, mit Ausnahme derjenigen Energiewerte, die stationären Zuständen des Teilchens im Kerninnern entsprechen. Nimmt im allgemeinen die Eigenfunktion in der Schwelle vom Kerninnern bis zum Außenraum um den Faktor α zu $\left(\alpha \sim e^{\frac{i}{\hbar}\int p_r\, dr}\right)$, so wird umgekehrt bei dem Energiewert E_0, der genau dem stationären Zustand entspricht, bei dem also in der Schwelle nur eine exponentiell nach außen abnehmende Welle vorhanden ist, die Amplitude im Kerninnern α-mal so groß sein wie im Außenraum. Rückt man um E_0/α weiter in der Energieskala, so wird auch die nach außen

ansteigende Lösung, mit einem um $1/\alpha$ kleineren Faktor als die abfallende, im Ausdruck für die gesamte Wellenfunktion im Kerninnern beteiligt sein; durch ihr Ansteigen in der Schwelle wird sie dann im Außenraum bereits dieselbe Amplitude haben wie die abfallende Funktion im Kerninnern. D. h. beim Fortschreiten um E_0/α reduziert sich das Verhältnis der Wellenamplituden innen und außen bereits von α auf 1; die Resonanzbreite ist E_0/α.

Diesen Sachverhalt kann man durch einen Vergleich mit den optischen Eigenschaften einer an beiden Seiten versilberten planparallelen Glasplatte (oder eines Fabry-Pérot-Etalons) anschaulich machen. Die Durchlässigkeit der Silberschicht entspricht der Durchlässigkeit $1/\alpha$ der COULOMBschen Potentialschwelle. Im allgemeinen wird schon an der ersten Silberschicht der Bruchteil $(1 - 1/\alpha)$ des einfallenden Lichtes reflektiert; die Wirkungen der hinter dieser Silberschicht liegenden Glasplatte können sich daher nur in Korrekturen der relativen Größenordnung $1/\alpha$ an der Intensität des reflektierenden Lichtes äußern. Für bestimmte Wellenlängen verstärken sich jedoch alle Wellen, welche die erste Silberschicht durchsetzt haben und nun im Innern der Glasplatte sehr oft hin und her reflektiert werden, durch Interferenz, und es entsteht in der Glasplatte eine um α größere Strahlungsdichte als im Außenraum. Der Bruchteil $1/\alpha$ dieser Strahlungsdichte, der die erste Silberschicht pro Hin- und Hergang wieder rückwärts verläßt, genügt gerade, um das von der ersten Silberschicht direkt reflektierte Licht durch Interferenz auszulöschen; so erweist sich die Glasplatte für diese Wellenlänge als vollkommen durchlässig, obwohl ihre beiden Grenzflächen für sich allein jeweils das Reflexionsvermögen $1 - 1/\alpha$ haben. Die Schärfe dieser „Resonanz" ist auch hier durch die Durchlässigkeit $1/\alpha$ der Silberschicht bestimmt, welche gewissermaßen die „Dämpfung" der im Innern der Glasplatte angeregten Eigenschwingung des elektromagnetischen Feldes mißt.

Während für den α-Zerfall die Durchlässigkeit der Potentialschwelle die einzige Dämpfung darstellt, wird die Ausbildung einer quasistationären Eigenschwingung eines Teilchens, das eine Kernreaktion auslöst, eben durch das Eintreten dieser Reaktion gestört. Man kann versuchen, diesen Effekt im Einkörpermodell noch näherungsweise durch Einführung eines gewissen Absorptionskoeffizienten des Kerninnern für die Welle des einfallenden Teilchens darzustellen (BREIT, JOHNSON und OSTROFSKY, 16). Die Wirkung einer solchen Absorption auf die Resonanz ist ebenfalls aus der Optik bekannt. Wenn bei einem Durchgang des Lichts durch die Glasplatte etwa $1/_{10}$ des Lichts absorbiert wird, so hat eine Steigerung des

Reflexionsvermögens der Silberschicht über $^9/_{10}$ hinaus keine Wirkung mehr, da die Welle im Innern praktisch doch nicht mehr als zehnmal hin- und herreflektiert wird und daher nicht mehr als zehn Wellenzüge sich durch Superposition verstärken können. Die Resonanz wird dann verwaschen und wenig ausgeprägt. Dies ist es, was wir nach den Überlegungen des vorangegangenen Paragraphen im Fall der normalen Umwandlungen durch geladene Teilchen zu erwarten haben. Setzt man eine Wahrscheinlichkeit der Umwandlung pro Zeiteinheit E/β an (d. h. verlangt man, daß der Zeitfaktor der Eigenfunktion $e^{\frac{E}{\hbar}\left(i-\frac{1}{\beta}\right)t}$ lautet, so ergibt sich aus der Randbedingung bei $r = r_0$, daß die exponentiell ansteigende Lösung stets mit einer relativen Amplitude von etwa $1/\beta$ neben der abfallenden Lösung auftritt. Ist β klein gegen α, so wird dadurch das Resonanzphänomen völlig zerstört; bei größerer Primärenergie, für welche die Durchlässigkeit der Potentialschwelle schon verhältnismäßig groß geworden ist, können unscharfe Resonanzen auftreten. Die Erfahrung bestätigt diesen Schluß. —

Man kann versuchen, auch die unter 2. genannten Eigenschaften der Umwandlung durch langsame Neutronen durch ein derartiges Resonanzphänomen zu erklären. Da für die Neutronen keine Potentialschwelle vorhanden ist, ist der Kern in diesem Fall mit einer Glasplatte zu vergleichen, deren Reflexionsvermögen an der Oberfläche nicht durch eine Silberschicht künstlich erhöht worden ist. Bei denjenigen Energien, für welche gerade eine ganze Zahl von Wellenlängen im Innenraum Platz hat, wird das Verhältnis der Amplituden der Wellenfunktion innen und außen auch in diesem Fall wesentlich größer als bei dazwischenliegenden Energiewerten. Jedoch sind diese Resonanzregionen stets sehr breit und entsprechend der Absolutwert der Amplitude auch im Maximum nicht sehr hoch, denn da das Neutron ohne wesentliche Hinderung den Kern verlassen kann, ist die Eigenschwingung im Kerninnern, schon wenn man von der Möglichkeit von Umwandlungsprozessen absieht, einer starken Dämpfung unterworfen.

Trotzdem können diese unscharfen Resonanzen Anlaß zu großen Wirkungsquerschnitten geben, wenn sie zufällig bei sehr niedrigen Energien liegen. Da für das Eintreten der Resonanz die Wellenlänge im Kerninnern verantwortlich ist, die für Neutronen, deren kinetische Energie außerhalb des Kerns nahezu Null ist, nur durch die Tiefe des Potentialtopfs bestimmt ist, kann die Resonanz sehr wohl einmal mit großer Genauigkeit bei der Geschwindigkeit Null der einfallenden Neutronen liegen. Der Kern ist

dann sehr klein gegen die Wellenlänge der Neutronen, und seine Wirkung auf die Wellenfunktion kann im wesentlichen als Einführung einer bestimmten (durch die Phase der Wellenfunktion am Kernrand definierten) Randbedingung am Ort des Kerns angesehen werden. Die Wellenfunktion kann durch die Einführung einer solchen Randbedingung in einem Raum von den Lineardimensionen der Wellenlänge um ihre eigene Größenordnung geändert werden. Daher kann dann auch der elastische Wirkungsquerschnitt die Größenordnung des Quadrats der Wellenlänge annehmen. Der Wirkungsquerschnitt für künstliche Umwandlung muß in dieser Näherung umgekehrt proportional zur Geschwindigkeit der Neutronen sein. Denn wegen der Breite der Resonanz wird das Verhältnis der Amplituden innen und außen nicht sehr empfindlich von den — verglichen mit der Tiefe des Potentialtopfs — kleinen Unterschieden der kinetischen Energie verschieden schneller „langsamer Neutronen" abhängen. Nun ist der Wirkungsquerschnitt definiert als die Zahl der pro Zeiteinheit stattfindenden Umwandlungen, dividiert durch die Zahl der pro Zeit- und Flächeneinheit eintretenden Teilchen. Will man diese letztere Zahl (den Teilchenstrom) konstant halten, so muß man mit abnehmender Neutronengeschwindigkeit mehr Neutronen pro Volumeneinheit einfallen lassen (Strom gleich Dichte mal Geschwindigkeit). Wegen der Proportionalität der Dichten innen und außen ist dann die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Neutrons in den Kern ebenfalls umgekehrt proportional zur Geschwindigkeit.

Dieses Modell genügt vielleicht, um die Beobachtungen über den Prozeß (n, α) zu erklären. Für die Prozesse (n, n) und (n, γ) versagt es in drei Punkten. Erstens liefert es die beobachtete Schärfe der Resonanzen (2c) nicht. Zweitens folgt aus ihm, daß große Streuquerschnitte und große Absorptionsquerschnitte stets miteinander gekoppelt sein sollten, da nur dann eine große Streuwirkung des Kerns auftreten kann, wenn die Wellenfunktion im Kerninnern nicht klein ist (vgl. dagegen 2b). Drittens ergibt das Modell nicht die richtige Häufigkeit des Auftretens großer Wirkungsquerschnitte. Große Querschnitte sind stets dann zu erwarten, wenn die Phase der Wellenfunktion, die zur Energie Null gehört, am Kernrand einen bestimmten Wert annimmt. Schreitet man nun von den leichten zu den schweren Kernen fort, so müßte auf einen Kern (oder eine Gruppe einander ähnlicher Kerne) mit sehr großem Wirkungsquerschnitt eine Reihe von Kernen mit kleinem Wirkungsquerschnitt folgen, bis durch die Vergrößerung des Kernradius mit wachsendem A schließlich eine Wellenlänge mehr im Kern Platz hat und daher der Phasenwert um 2π fortgeschritten

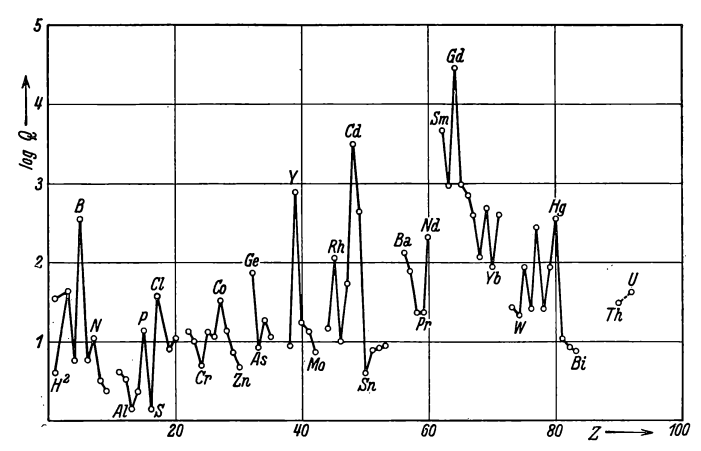


Fig. 23. Wirkungsquerschnitte verschiedener Kerne für langsame Neutronen (nach DUNNING und PEGRAM). Absorption und Streuung sind nicht getrennt. Einheit für Q : 10^{-24} cm^2.

sein kann. Aus Fig. 23 könnte vielleicht eine Periodizität der Wirkungsquerschnitte mit A herausgelesen werden. Aber wenn man die Tiefe des Potentialtopfs aus den bekannten Bindungsenergien der Neutronen im Kern entnimmt, so ergibt die Rechnung, daß höchstens drei Maxima im ganzen Bereich der bekannten Kerne auftreten dürften (VAN VLECK, 91). Umgekehrt würde aus der beobachteten Anzahl der Maxima eine sehr kleine Wellenlänge der Neutronen im Kern folgen, die nur bei potentiellen Energien der Größenordnung 100 Millionen Volt möglich wäre.

§ 26. Resonanzphänomene. Diskussion nach dem Mehrkörpermodell

Der Mißerfolg des Einkörpermodells bei der Erklärung der Umwandlung durch langsame Neutronen legt den Versuch einer Anwendung des schematisierten Mehrkörpermodells (§ 24) nahe. Wir nehmen also an, daß der gestoßene Kern zunächst mit dem eingefangenen Neutron zusammen in einen angeregten Zwischenzustand übergeht. Da wir vor allem die Schärfe der Resonanzen erklären müssen, ist es wichtig, die (für die Dämpfung maßgebende) Lebensdauer eines solchen Zustandes abzuschätzen. Die beobachteten Resonanzgebiete sind zum Teil nicht breiter als etwa 0,1 Volt, während die Höhe des Zustandes eines langsamen freien Neutrons über dem Grundzustand des im Kern gebundenen Neutrons (d. h. die Anregungsenergie des quasistationären Niveaus) von der Größenordnung

10 Millionen Volt ist; daher beträgt der relative Fehler, mit dem die Energie des Zwischenzustandes definiert ist, 10^{-8}. Damit dies möglich ist, müssen die Kernteilchen in diesem Zustand wenigstens 10^8 Schwingungen ausführen, ehe das Neutron ihn wieder verläßt. (Diese Argumentation macht Gebrauch davon, daß die Energie eines quantenmechanischen Systems ganz allgemein als h mal der Frequenz einer Eigenschwingung der ψ-Funktion bestimmt wird und daher die Unbestimmtheit der Frequenz, welche durch eine Dämpfung dieser Schwingung im Intervall Δt auftritt, nach der Unbestimmtheitsrelation $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$ die natürliche Breite des Niveaus ergibt.) Rechnet man für einen Hin- und Hergang die Zeit $r_0/v \sim 10^{-21}$ sec, so ergeben sich Lebensdauern der Größenordnung 10^{-13} sec für die quasistationären Zustände.

Bei der theoretischen Abschätzung dieser Lebensdauern muß die Quantisierung der möglichen Schwingungszustände des Kerns berücksichtigt werden. Dürfte man nämlich den Kern als klassisches Flüssigkeitströpfchen auffassen, so wäre der Übergang in den „quasistationären" Zustand identisch mit der Umsetzung der Bindungsenergie des Neutrons in Wärmeenergie des Tröpfchens. Der Übergang wäre also im Sinn der Thermodynamik irreversibel; d. h. dieselbe Gesamtenergie des Kerns könnte durch so viele verschiedene Aufteilungen des Energiebetrages auf die einzelnen Kernbausteine realisiert werden, daß die Wiedervereinigung der Energie auf ein einzelnes Teilchen eine sehr geringe a priori-Wahrscheinlichkeit erhielte und praktisch nie vorkäme. Wenn man dagegen berücksichtigt, daß nur diskrete Energieniveaus im Kern vorhanden sind, so wird die Zahl der Verteilungsmöglichkeiten eingeschränkt. Nehmen wir, um ein einfaches Modell zu haben, an, es gebe für jedes Teilchen in einem Kern der Teilchenzahl A außer dem Grundzustand nur einen angeregten Zustand mit bestimmter (für alle Teilchen gleicher) Energie E_0, und die Energie, die das einfallende Neutron dem Kern zuführt, betrage genau $2E_0$, und es sei ferner die Wechselwirkung zwischen den Kernbestandteilen so groß, daß jeweils nach Verlauf der Zeit τ die Anregungsenergie von einem Teilchen auf ein anderes weitergegeben wird, so vereinigt sich der Gesamtenergiebetrag $2E_0$, der anfangs irgendwie auf zwei Teilchen verteilt worden ist, im Mittel nach Verlauf der Zeit $A\tau$ wieder auf einem Teilchen und befähigt dieses dadurch zum Verlassen des Kerns. Sind zwei Anregungsstufen E_0 und $2E_0$ vorhanden und ist die Energie des einfallenden Neutrons $3E_0$, so muß man die Zeit $A^2\tau$ warten; allgemein für n äquidistante Zwischenzustände $A^n\tau$. Da τ von der Größenordnung 10^{-21} sec sein dürfte, wird man mit 3 bis 4 Zwischenzuständen auskommen. Selbstverständlich

bedeutet diese Betrachtung nur eine grobe Veranschaulichung des quantenmechanischen Vorgangs; sie soll nur zur ersten Abschätzung der Lebensdauern dienen. Außerdem zeigt sie, daß in der Tat das einfallende Neutron einen ganz bestimmten Energiewert haben muß, um den Kern überhaupt anregen zu können.

Dieses Modell erklärt also die Schärfe der Resonanzen, genau wie es im Fall der geladenen Teilchen das Einkörpermodell tut, durch die Kleinheit der Übergangswahrscheinlichkeit zwischen dem freien Zustand des Neutrons und dem Zustand, in dem es sich im Kern befindet. Die „quasistationären" Zustände erscheinen als die direkte Fortsetzung der Reihe angeregter stationärer Zustände des Gesamtkerns (der durch Absorption des Neutrons entsteht) in das Gebiet sehr hoher Anregungsenergien; es entspricht ja dem Tröpfchenmodell, auch diese tieferen diskreten Niveaus nicht als Anregungen eines einzelnen Teilchens, sondern eher als Eigenschwingungen der gesamten Kernflüssigkeit aufzufassen. Oberhalb der „Ionisierungsenergie" sind die Zustände strenggenommen kontinuierlich verteilt, weil ein Neutron vom Kern losgetrennt sein kann; aber aus diesem Kontinuum heben sich genau wie beim α-Zerfall gewisse diskrete Energien weiterhin heraus, in denen der Kern die gesamte Anregungsenergie als Schwingungsenergie enthält. Während die Breite der tieferen Terme lediglich durch ihre Dämpfung infolge der Möglichkeit der Emission von γ-Strahlung bestimmt ist, haben diese hochangeregten Schwingungen als weitere Dämpfung die Möglichkeit der Emission eines Neutrons. Die Lebensdauern gegen γ-Emission sind nach § 32 von der Größenordnung 10^{-11}—10^{-15} sec. Die Möglichkeit, den quasistationären Zuständen eine ebenso lange oder längere Lebensdauer gegen Emission eines Neutrons zuzuschreiben, erklärt demnach gleichzeitig mit der großen Schärfe der Resonanzen auch die Tatsache, daß der Prozeß (n, γ) in vielen Fällen bei der Resonanzenergie sehr viel wahrscheinlicher ist als die elastische Streuung. Neben dem hier betrachteten Übergang aus dem Zustand des freien Neutrons in den quasistationären Zustand wird es außerdem immer noch die im Einkörpermodell betrachteten direkten Übergänge zwischen dem Zustand des freien Neutrons und dem des umgewandelten Kerns geben; daher kann das Einkörpermodell für die Energieintervalle zwischen den Resonanzenergien vielleicht noch eine brauchbare Näherung liefern.

Mit wachsender Energie des einfallenden Neutrons wird die Übergangswahrscheinlichkeit der quasistationären Zustände in den Zustand des freien Neutrons zunehmen und dadurch die Schärfe der Resonanzen zerstört werden. Dieses gesamte Verhalten ist dem der Moleküle bei der

Prädissoziation genau analog. Einen Fall, in dem schon bei sehr kleiner Neutronenenergie keine scharfen Resonanzen mehr vorkommen, scheinen die Prozesse (n, α) zu bilden, bei denen ein großer Energiebetrag frei wird, mit dessen Hilfe das α-Teilchen sofort den Kern verlassen kann.

Die Häufigkeit der großen Wirkungsquerschnitte bildet für unser Modell kein schwieriges Problem, sofern es erlaubt ist, eine relativ dichte Lage der quasistationären Zustände anzunehmen; vgl. dazu § 29.

3. Umwandlungen durch materielle Teilchen

§ 27. Theorie der elastischen Streuung

Es ist vorteilhaft, die wichtigsten Begriffe der Theorie der elastischen Streuung, die zugleich für die Theorie des Eindringens materieller Teilchen in den Kern die Grundlage bilden, zunächst ohne Spezialisierung auf eine bestimmte Teilchensorte zu entwickeln.

Bei Streuexperimenten pflegt ein Strahl von Teilchen paralleler Flugrichtung auf den Kern aufzutreffen. Gemessen wird die Zahl $n_\vartheta d\omega$ der in der Zeiteinheit in einen gewissen — um den Winkel ϑ von der ursprünglichen Flugrichtung abweichenden — Raumwinkel $d\omega$ hineingestreuten Teilchen. Diese Zahl ist proportional zur Stärke des einfallenden Stroms, d. h. zur Zahl N der pro Zeiteinheit durch die Flächeneinheit tretenden Primärteilchen. Man kann also schreiben

$$n_\vartheta d\omega = N Q(\vartheta) d\omega. \tag{27.1}$$

$Q(\vartheta)$ hat die Dimensionen einer Fläche und heißt der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Streuung in den Raumwinkel $d\omega$. Er ist anschaulich der Bruchteil eines von den Primärteilchen durchsetzten Gesamtquerschnitts, der für die Streuung unter dem Winkel ϑ effektiv wird. Durch Integration über alle Winkel erhält man den totalen oder integralen Wirkungsquerschnitt, der die Wahrscheinlichkeit eines Streuakts, unabhängig von der Streurichtung, mißt:

$$Q = \int Q(\vartheta) d\omega. \tag{27.2}$$

Das einfachste Verfahren zur Behandlung von Streuproblemen ist die Bornsche Methode, welche die Wirkung des streuenden Potentials als kleine Störung der Wellenfunktion auffaßt. Die erreichbaren Geschoßenergien sind jedoch zu niedrig, um ihre Anwendung zu gestatten. Denn

das Potential ist sicher keine kleine Störung mehr, wenn es die Phase der Wellenfunktion um mehr als π gegen diejenige Phase verschiebt, welche die ungestörte Wellenfunktion an der Stelle des Potentials hätte; denn dann kann die Wellenfunktion durch Interferenz auch außerhalb des Kerns um ihre eigene Größenordnung geändert werden. Nun sind die Kernpotentiale so groß, daß sie Teilchen, deren kinetische Energie von der Größenordnung der Geschoßenergien ist, binden, also völlig aus der Bahn eines freien Teilchens ablenken können, und man schätzt daher leicht ab, daß auch die Eigenfunktionen von außen kommender Teilchen infolge des Kernpotentials große Phasenverschiebungen (Änderungen von $\int p\,dq$ um $\approx h$) erleiden.

Jedoch besteht eine andere Vereinfachung des Problems. Nach allgemeinen Sätzen der Quantentheorie muß der Drehimpuls jedes Geschosses relativ zum Kernmittelpunkt ein ganzzahliges Vielfaches von $\hbar$ sein. Nach der klassischen Bahnvorstellung ist dieser Drehimpuls gegeben durch das Produkt aus dem Impuls des Teilchens vor dem Stoß und dem Abstand, in dem seine (geradlinig fortgesetzt gedachte) Bahn den Kern passiert. Ist die Primärgeschwindigkeit gering, so werden demnach nur Teilchen mit geringem Drehimpuls in die Nähe des Kerns kommen; nur sie werden daher eine starke Ablenkung erleiden. Es wird also vorteilhaft sein, eine Rechenmethode zu verwenden, bei der die Teilchen mit verschiedenen Drehimpulsquantenzahlen getrennt behandelt werden, weil es dann für viele Fälle genügt, sich auf Teilchen mit kleinen Drehimpulsen zu beschränken. In der Tat kommt man für die meisten Streuprobleme sogar mit der Berücksichtigung des Drehimpulses Null aus. Quantenmechanisch ist nämlich nur den Teilchen mit verschwindendem Drehimpuls eine kugelsymmetrische Streuwelle zugeordnet, und diese genügt nach § 24 zur Darstellung der meisten Erfahrungen.

Einem Teilchen vom Drehimpuls $l\hbar$ entspricht eine Wellenfunktion, deren Winkelabhängigkeit durch die Legendresche Kugelfunktion $P_l(\cos\vartheta)$ gegeben ist. Es ist

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l \cdot l!}\,\frac{d^l(x^2-1)^l}{dx^l} \tag{27.3}$$

speziell

$$P_0(\cos\vartheta) = 1\ ;\quad P_1(\cos\vartheta) = \cos\vartheta\ ;\quad P_2(\cos\vartheta) = \tfrac{1}{2}(3\cos^2\vartheta - 1). \tag{27.4}$$

Die vollständige Wellenfunktion eines Teilchens des Drehimpulses l und der Drehimpulskomponente in der Richtung der Polarachse $m = 0$ lautet

$$\psi_l(r,\vartheta) = \chi_l(r) P_l(\cos\vartheta). \tag{27.5}$$

Setzt man für die Wirkung des Kerns auf das Geschoß ein festes kugelsymmetrisches Potential $V(r)$ an, so gilt für χ_l die Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2\chi_l}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\chi_l}{\partial r}-\frac{l(l+1)}{r^2}\chi_l\right)+V(r)\chi_l=E_l\chi_l\,; \tag{27.6}$$

dabei ist μ die reduzierte Masse des Kerns und des Geschosses

$$\mu=\frac{m_K m_G}{m_K+m_G}. \tag{27.7}$$

Für den feldfreien Raum ($V=0$) sind die Eigenlösungen von (27.6) die BESSELfunktionen vom halbzahligen Index: $J_{n+\frac{1}{2}}(kr)$, wobei $k=\sqrt{2\mu E}/\hbar$; sie lassen sich durch sin und cos darstellen; es ist z. B.

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\,;\quad J_{\frac{3}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\right). \tag{27.8}$$

Ferner wird für $x\gg p$

$$J_p(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{2p+1}{4}\pi\right). \tag{27.9}$$

Sucht man speziell diejenige Überlagerung der Lösungen, welche eine ebene Welle darstellt, so ergibt sich

$$e^{ikz}=e^{ikr\cos\vartheta}=\sum_0^\infty P_l(\cos\vartheta)(2l+1)i^l\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}J_{l+\frac{1}{2}}(kr). \tag{27.10}$$

Infolge des Streuvorganges wird nun zu dieser einfallenden ebenen Welle eine auslaufende Kugelwelle kommen, die ebenfalls als Superposition von Wellen mit verschiedenem festem l dargestellt werden kann. Wenn das Potential kugelsymmetrisch ist, kann es keine Übergänge in l verursachen; die Intensität jeder Streuwelle mit einem bestimmten l ist also einfach ein bestimmter Bruchteil der Intensität der einfallenden Welle mit demselben l. Zur Berechnung der Einwirkung des Potentials $V(r)$ auf die einfallende Welle genügt also die Bestimmung einer Zahl für jedes l, welche diesen Bruchteil festlegt. Es ist bequem, hierfür die Phase der Wellenfunktion in großem Kernabstand zu wählen. Für sehr große Werte von r, bei denen sowohl das echte Potential $V(r)$ wie das „Zentrifugalpotential" $l(l+1)/r^2$ zu Null abgeklungen ist, muß $\chi_l(r)$ nämlich unabhängig von l und V die Form der kräftefreien Lösung für $l=0$ haben:

$$\chi_l(r\to\infty)=a_l\frac{\sin(kr+\delta_l-l\pi/2)}{kr}. \tag{27.11}$$

Der Faktor a_l bleibt für die Normierung frei; der sinusförmige Verlauf und der Faktor $1/r$ folgen aus der Differentialgleichung für freie Teilchen;

da diese nur für große r gültige Lösung aber die Randbedingung des Endlichbleibens für $r=0$ nicht zu erfüllen braucht, bleibt der Wert der Phase δ_l frei (das Glied $l\pi/2$ ist zur Vereinfachung der späteren Formeln hier hinzugefügt). δ_l wird vom Potentialverlauf im Kern und von der kinetischen Energie des Teilchens (also von k) abhängen. Es sei bemerkt, daß (27.11) nicht gilt, wenn das Potential $V(r)$ nur wie $1/r$ oder langsamer nach außen abnimmt; vgl. § 30.

Um den Streuvorgang darzustellen, verlangen wir nun, daß sich die Wellenfunktion in großem Abstand vom Kern schreiben läßt als Summe der einfallenden ebenen Welle und einer auslaufenden Streuwelle:

$$\psi(r\to\infty,\vartheta) = b\,e^{ikr\cos\vartheta} + f(\vartheta)\,\frac{e^{ikr}}{r}. \tag{27.12}$$

Wenn b so gewählt wird, daß die einfallende Welle ein Teilchen pro Flächen- und Zeiteinheit enthält, so ist $|f(\vartheta)|^2 d\omega$ die Zahl der pro Zeiteinheit in den Raumwinkel $d\omega$ gestreuten Teilchen, d. h.

$$Q(\vartheta) = |f(\vartheta)|^2. \tag{27.13}$$

Nun wissen wir einerseits nach (27.10), daß sich die zum Drehimpuls l gehörige Komponente der einfallenden Welle für große r verhält wie

$$\frac{(2l+1)}{kr}\,i^l\cos\left(kr-\frac{l+1}{2}\pi\right), \tag{27.14}$$

und andererseits, daß die Gesamtlösung sich wie (27.11) verhalten muß; also muß die auslaufende Zusatzwelle sich wie die Differenz der beiden Ausdrücke, d. h. wie

$$\frac{(2l+1)}{kr}\,e^{ikr}\,\frac{1}{2i}\left(e^{2i\delta_l}-1\right) \tag{27.15}$$

verhalten, und es folgt

$$a_l = b\,(2l+1)\,i^l e^{i\delta_l}. \tag{27.16}$$

(27.12) lautet demnach ausgeschrieben

$$\psi(r,\vartheta) = b\,e^{ikr\cos\vartheta} + \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\vartheta)\,(2l+1)\,\frac{e^{ikr}}{2ikr}\left(e^{2i\delta_l}-1\right), \tag{27.17}$$

und es folgt

$$Q(\vartheta)\,d\omega = \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\cdot\sum_{l=0}^{\infty} P_l^2(\cos\vartheta)\,(2l+1)^2\,\frac{\sin^2\delta_l}{k^2} \tag{27.18}$$

und durch Integration über ϑ und φ

$$Q = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l. \tag{27.19}$$

Durch diese Formel ist die Bestimmung des Wirkungsquerschnitts reduziert auf die Bestimmung der Phasen δ_l. Sie stellt den Streuquerschnitt dar als Summe der Querschnitte für die einzelnen Drehimpuls-

quantenzahlen; wenn man berücksichtigt, daß ein Zustand mit dem Drehimpuls $l\hbar$ gerade $(2l+1)$-fach entartet ist, kann man jeder Teilwelle den Partialwirkungsquerschnitt $(4\pi/k^2)\sin^2\delta_l$ zuschreiben. Ist speziell nur $\delta_0 \neq 0$, d. h. ist die Wellenlänge der einfallenden Strahlung groß gegen die Kerndimensionen und die Streuung daher kugelsymmetrisch, so folgt aus (27.19) ein Resultat, von dem wir schon mehrfach in den anschaulichen Betrachtungen Gebrauch gemacht haben:

$$Q_{l=0} \leq 4\pi/k^2 = \lambda^2/\pi; \tag{27.20}$$

der Wirkungsquerschnitt kann höchstens von der Größenordnung des Quadrats der Wellenlänge werden.

Die Aufgabe der Bestimmung der Phasen δ_l fällt einer Theorie zu, welche die speziellen Eigenschaften von Kern und Geschoß berücksichtigt.

§ 28. Theorie der Umwandlung durch Neutronen

Der einfachste Streuprozeß, der nach den Methoden des letzten Paragraphen behandelt werden kann, ist die Streuung von Neutronen an Protonen. Legt man das in § 15 angegebene Austauschpotential $J(r) = a e^{-b^2 r^2}$ zugrunde, so lassen sich die Phasen δ_0, $\delta_1, \ldots$ jeweils durch numerische Integration der Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2\right)\chi_l = a_l^{-b^2 r^2}\chi_l \frac{M}{\hbar^2} \tag{28.1}$$

gewinnen (die reduzierte Masse ist gleich der halben Protonenmasse).

Da jedoch bei allen erreichbaren Neutronengeschwindigkeiten die Wellenlänge groß ist gegen die mutmaßliche Breite des Potentials, genügt es, wenn wir uns auf den Fall $l = 0$ beschränken. Das heißt: hinsichtlich der Streuung an Protonen sind alle bis jetzt hergestellten Neutronen „langsam". Die Neutron-Proton-Streuung bietet dadurch noch ein besonderes theoretisches Interesse, daß sie den einzigen Spezialfall unter den Neutronenreaktionen darstellt, der mit Sicherheit nach dem Einkörpermodell behandelt werden darf.

Im Hinblick auf diesen Spezialfall und zur Begründung der in § 24 ausgesprochenen Behauptungen diskutieren wir zunächst die Reaktionen sehr langsamer Neutronen mit beliebigen Kernen nach dem Einkörpermodell im Anschluß an Überlegungen von Fermi (3) und Bethe (10). Wir dürfen uns voraussetzungsgemäß auf den Fall $l = 0$ beschränken und erhalten, wenn wir

$$X = r\chi_0 \tag{28.2}$$

einführen, für X die Gleichung

$$\frac{\partial^2 X}{\partial r^2} + k^2 X - \frac{2\mu}{\hbar^2} V X = 0. \tag{28.3}$$

Für Werte von r, für die $V(r)$ vernachlässigt werden kann (d. h. vermutlich schon für alle Werte, die größer sind als der Radius der Dichteverteilung nach § 16 und 17), ist dies die Gleichung einer eindimensionalen ebenen Welle; die Lösung lautet

$$X(r > r_0) = a_0 \sin(kr + \delta_0). \tag{28.4}$$

Wenn nun k sehr klein ist, wird der Verlauf von X für $r < r_0$ unabhängig von k, denn das Glied $k^2 X$ kann dann neben dem Glied mit V in (28.3) gestrichen werden. Die Tangentenrichtung von X (vgl. Fig. 24) am Kernrand, d. h. der Wert von (X'/X) am Ort $r = r_0$ ist demnach von k unabhängig. Da für kleine k die Wellenlänge außen sehr groß ist gegen den Kernradius, kann man im Außenraum in der Umgebung des Kerns

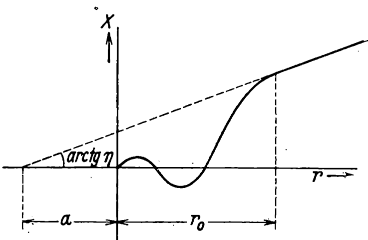


Fig. 24. Verlauf der Wellenfunktion eines sehr langsamen Neutrons im Kern nach dem Einkörpermodell (nach FERMI, 3).

$$X \sim a_0(kr + \delta_0) \tag{28.5}$$

setzen. Die Lage dieser Geraden ist durch X'/X bei $r = r_0$ gegeben; die Normierung wurde so gewählt, daß $\chi_0(0) = 1$, d. h. $X'(0) = 1$. Die Phase δ_0 hängt mit dem Abszissenabschnitt a (Fig. 24) durch die Gleichung

$$\delta_0 = ka \tag{28.6}$$

zusammen; da somit auch δ_0 mit k klein wird, folgt

$$Q = 4\pi a^2. \tag{28.7}$$

Das Verhältnis der Absolutwerte der Wellenfunktion χ_0 außen und innen ist durch die Neigung η gegeben; ist die Teilchendichte im Außenraum ϱ, so ist sie im Kernmittelpunkt

$$\varrho_0 = \varrho / \eta^2. \tag{28.8}$$

Man erkennt, daß der Streuquerschnitt unabhängig wird von der Neutronengeschwindigkeit, und die Umwandlungswahrscheinlichkeit, die man wohl zu ϱ_0 proportional setzen darf, wird proportional zur Dichte im Außenraum und somit nach dem Argument von § 24 der Wirkungsquerschnitt für Umwandlung umgekehrt proportional zur Geschwindigkeit. Da ferner der Verlauf der Wellenfunktion für $r < r_0$ von k unabhängig ist, kann a

nur groß werden, wenn η klein wird; damit ist der § 24 behauptete Zusammenhang zwischen großen Streu- und Umwandlungsquerschnitten gezeigt.

Um eine quantitative Abschätzung der Wirkungsquerschnitte zu gewinnen (BETHE, l. c.) setzt man das Potential am besten gleich Null für $r > r_0$ und gleich $-V_0$ für $r < r_0$ (rechteckiger Potentialtopf). Mit der Bezeichnung

$$K^2 = k^2 + \frac{2\mu}{\hbar^2} V_0 \tag{28.9}$$

folgt dann

$$\left.\begin{aligned} X(r < r_0) &= \frac{\alpha}{K} \sin K r \\ X(r > r_0) &= \frac{e^{i\delta_0}}{k} \sin(kr + \delta_0) \end{aligned}\right\} \tag{28.10}$$

und daraus die Randbedingungen bei $r = r_0$:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\alpha}{K} \sin K r_0 = \frac{e^{i\delta_0}}{k} \sin(k r_0 + \delta_0) \\ X' &= \alpha \cos K r_0 = e^{i\delta_0} \cos(k r_0 + \delta_0). \end{aligned}\right\} \tag{28.11}$$

Hieraus folgt durch Division

$$\frac{1}{K} \operatorname{tg} K r_0 = \frac{1}{k} \operatorname{tg}(k r_0 + \delta_0) \tag{28.12}$$

und daraus

$$\sin(k r_0 + \delta_0) = \frac{\frac{k}{K} \operatorname{tg} K r_0}{\sqrt{1 + \frac{k^2}{K^2} \operatorname{tg}^2 K r_0}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{K^2}{k^2} \operatorname{cotg}^2 K r_0 + 1}}. \tag{28.13}$$

Für den Wirkungsquerschnitt ergibt sich aus (28.13)

$$Q = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 = 4\pi \frac{\left(\cos k r_0 - \sin k r_0 \cdot \frac{K}{k} \operatorname{cotg} K r_0\right)^2}{k^2 + K^2 \operatorname{cotg}^2 K r_0}. \tag{28.14}$$

Für langsame Neutronen ($k r_0 \ll 1$) geht dies über in

$$Q \approx 4\pi \frac{(1 - K r_0 \operatorname{cotg} K r_0)^2}{k^2 + K^2 \operatorname{cotg}^2 K r_0}. \tag{28.15}$$

Die Größe dieses Wirkungsquerschnitts hängt entscheidend vom Wert der Phase $K r_0$ ab. Für die meisten Werte von $K r_0$ ist stets $k \ll K \operatorname{cotg} K r_0$ und

$$Q \approx 4\pi \left(r_0 - \frac{\operatorname{tg} K r_0}{K}\right)^2 = 4\pi (r_0 - \lambda_0 \operatorname{tg} \varepsilon)^2, \tag{28.16}$$

wobei λ_0 die Wellenlänge im Kerninnern und ε die Phase der Wellenfunktion am Kernrand bezeichnet. Der Wirkungsquerschnitt ist also im allgemeinen von der Größenordnung der Kernoberfläche. Wenn jedoch

die Phase $\varepsilon = K r_0$ sich einem der Werte $\pi/2$, $3\pi/2, \ldots$ nähert, d. h. wenn die Wellenfunktion am Kernrand gerade einen Schwingungsbauch hat, so kann der Wirkungsquerschnitt bis zum Maximalwert $4\pi/k^2$ ansteigen. Dabei nähert er sich (außer wenn ε exakt gleich $\pi/2$, $3\pi/2, \ldots$ ist) für $k \to 0$ nach (28.7) einem konstanten, durch (28.16) gegebenen Wert. Die Amplitude α, welche die für die Umwandlung wesentliche Größe der Eigenfunktion im Kerninnern mißt, ist nach (28.11)

$$\alpha = \frac{e^{i\delta_0} \cos(k r_0 + \delta_0)}{\cos K r_0} = \frac{e^{i\delta_0}}{\sqrt{\cos^2 K r_0 + \frac{k^2}{K^2} \sin^2 K r_0}} \tag{28.17}$$

und für $k \ll K \operatorname{cotg} K r_0$

$$\alpha \approx 1/\cos K r_0 . \tag{28.18}$$

Wenn der Abfall des Potentials am Kernrand genauer berücksichtigt werden soll, so kann für r_0 etwa der Radius eingesetzt werden, bei dem das Potential praktisch auf Null abgeklungen ist. Statt $(1/K) \cdot \operatorname{tg} K r_0$ ist dann in (28.12) zu setzen $(X/X')_{r_0}$; man erhält die allgemeineren Formeln

$$Q = 4\pi [r_0 - (X/X')_{r_0}]^2 \tag{28.19}$$

und

$$\alpha = k / X'_{r_0} . \tag{28.20}$$

Um abzuschätzen, wie groß der durch den Ansatz des eckigen Potentialtopfs begangene Fehler höchstens ist, kann man die (sicher für die wirklichen Kerne unzutreffende) Annahme machen, das Potential falle am Kernrand so langsam ab, daß man X nach dem W.K.B.-Verfahren berechnen kann (vgl. § 20). Man erhält dann

$$X(r) \approx \frac{\text{const}}{p_r} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_0^r p_r \, dr\right) \tag{28.21}$$

und

$$\left(\frac{X}{X'}\right)_{r_0} \approx \frac{1}{k} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{\hbar} \int_0^{r_0} p_r \, dr\right). \tag{28.22}$$

Die allgemeine Form des Ausdrucks (28.16) bleibt also erhalten. Als Phase ε der Wellenfunktion am Kernrand tritt an Stelle von $K r_0$ die Größe $\frac{1}{\hbar} \int_0^r p_r \, dr$ auf. Als Faktor λ_0 vor dem $\operatorname{tg} \varepsilon$ erscheint aber jetzt $1/k$, d. h. im wesentlichen die Wellenlänge außen und nicht wie in (28.16) die Wellenlänge im Kerninnern. λ_0 hängt also von der Steilheit des Potentialabfalls ab und liegt wohl im allgemeinen zwischen den Extremwerten $1/K$ und $1/k$. Da weder der Abfall des Potentials zwischen Neutron und Proton (§ 15) noch der Abfall der Dichteverteilung am Kernrand (§ 17) hinreichend

langsam erfolgt, um eine Anwendung des W.K.B.-Verfahrens zu rechtfertigen, wird der Wert $1/K$ der Wirklichkeit näher liegen. BETHE (l. c.) hat für das spezielle Potential

$$V(r) = \frac{V_0}{e^{2(r-r_0)/l}+1} \tag{28.23}$$

den Wert

$$\lambda_0 = \frac{\pi l}{2\,\mathrm{tg\,h}\left(\frac{\pi}{2} K l\right)} \tag{28.24}$$

gefunden; λ_0 kann also bei Potentialen dieses Typus direkt als Maß für die Abfallsbreite des Potentials am Kernrand gelten.

BETHE und PEIERLS (9) haben darauf hingewiesen, daß gerade für die Neutron-Proton-Streuung die Kenntnis des Potentialverlaufs nicht notwendig ist, sofern wir nur annehmen dürfen, daß die Tiefe des Potentials groß ist gegen den Massendefekt des Deuterons (was nach § 15 sehr wahrscheinlich ist). Denn dann wird sich nach dem obigen Argument auch die Eigenfunktion des Neutrons im Deuterongrundzustand für $r < r_0$ nicht wesentlich von der eines hinreichend langsamen freien Neutrons unterscheiden; somit gilt auch für beide Fälle dieselbe Randbedingung bei $r = r_0$ für den Funktionsverlauf bei $r > r_0$. Nun kennen wir aber diese Randbedingung für den Deuterongrundzustand. Aus (15.23) und (15.24) folgt nämlich

$$\left(\frac{X'}{X}\right)_{r_0} = K \operatorname{cotg} K r_0 = -\frac{\sqrt{ME}}{\hbar}, \tag{28.24a}$$

wobei E die Bindungsenergie des Deuterons bedeutet. Nun folgt aus der Annahme, E sei klein gegen die Tiefe des Potentials, daß die Abfallsbreite $\hbar/\sqrt{ME}$ der Eigenfunktion groß ist gegen die Abfallsbreite des Potentials. Man kann daher r_0 so klein wählen, daß in (28.15) im Zähler $K r_0$ vernachlässigt werden darf, und es folgt, wenn man die Primärenergie des Neutrons E_0 nennt und berücksichtigt, daß $k = \sqrt{2\,M E_0}/\hbar$, die Formel

$$Q = \frac{4\pi\hbar^2}{M(E + E_0/2)}, \tag{28.24b}$$

die wir im § 29 mit der Erfahrung vergleichen.

Eine gewisse Abänderung erfahren die Formeln (28.16) und (28.18), wenn das Neutron im Kerninnern die Möglichkeit hat, Umwandlungsprozesse hervorzurufen, also z. B. unter Emission eines Lichtquants in einen im Kern gebundenen Zustand überzugehen. In diesem Fall erleidet die Eigenfunktion des Neutrons beim Fortschreiten im Kerninnern eine Absorption. Man kann das nach OSTROFSKY, BREIT und JOHNSON (16) analog zur Methode des komplexen Eigenwerts formal am bequemsten

durch einen komplexen Zusatz zur potentiellen Energie und damit zum Impuls $\hbar K$ im Kerninnern ausdrücken. Im Kerninnern gilt dann die Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\psi + \left[V(r) - \frac{i\hbar w}{2}\right]\psi = \frac{\hbar^2}{2\mu}K^2\psi. \qquad (28.25)$$

Aus ihr folgt

$$\frac{\hbar}{2\mu i}\operatorname{div}(\psi^*\operatorname{grad}\psi - \psi\operatorname{grad}\psi^*) = -w\psi^*\psi, \qquad (28.26)$$

d. h. von den Teilchen verschwinden im Kerninnern $w\psi^*\psi$ pro cm^3 und sec. Ferner ist

$$K'^2 = k^2 + \frac{2\mu V_0}{\hbar^2} + \frac{i\mu w}{\hbar} = (K + i\beta)^2. \qquad (28.27)$$

Die Phase δ_l wird nun komplex, d. h. die auslaufende Welle ist nicht so stark wie die einlaufende. An Stelle von $\sin^2\delta_l$ in (27.19) tritt

$$\tfrac{1}{4}(e^{2i\delta_l} - 1)(e^{-2i\delta_l} - 1),$$

was für $|\delta_l| \ll 1$ in $|\delta_l|^2$ übergeht. Für den Wirkungsquerschnitt erhält man nun

$$Q = 4\pi\,|r_0 - \lambda_0\operatorname{tg}(Kr_0 + i\beta r_0)|^2. \qquad (28.28)$$

Q wächst nach dieser Gleichung an den Resonanzstellen $Kr_0 = \pi/2, 3\pi/2 \ldots$ höchstens zu dem Wert

$$Q_{\max} = 4\pi(r_0^2 + \lambda_0^2\operatorname{cotg} h^2\beta r_0) \qquad (28.29)$$

sofern $\beta r_0 > \lambda_0 k$, im Einklang mit den anschaulichen Betrachtungen von § 25. Der Wert des Absorptionskoeffizienten β kann nur aus einer Theorie des betreffenden Umwandlungsprozesses bestimmt werden. Bei dem Prozeß (n, γ) ergibt die Abschätzung in § 34 für β die Größenordnung $10^{-7}\sqrt{2\mu V_0}/\hbar$. Für den Vergleich der theoretischen Werte von Q mit der Erfahrung spielt diese Absorption also praktisch keine Rolle. —

Da wir bereits wissen, daß das Einkörpermodell zur Deutung der Erfahrungen nicht genügt, ist es wichtig zu untersuchen, welche quantitativen Voraussagen das Mehrkörpermodell erlaubt. Eine Berechnung der Lage der quasistationären Zustände und ihrer Übergangswahrscheinlichkeiten zu den Zuständen des freien Neutrons einerseits, des umgewandelten Kerns andererseits soll hier nicht versucht werden (Abschätzungen vgl. § 29). Dagegen geben wir den Gedankengang und das Resultat einer Rechnung von Breit und Wigner (17) an, die zu einer Formel für die Wirkungsquerschnitte bei gegebenen Werten dieser Größen führt.

Bei einer bestimmten Energie, die um $h\nu_0$ über dem Nullniveau des freien Neutrons liegt, befinde sich ein quasistationärer angeregter Zustand des Systems Kern plus Neutron. Wenn das Neutron einmal in diesem Zustand eingefangen ist, soll es in der Zeiteinheit mit der Wahrscheinlichkeit $4\pi\Gamma_s$ wieder in den freien Zustand zurückkehren und mit der

Wahrscheinlichkeit $4\pi\Gamma_e$ unter Emission eines Lichtquants in einen tieferen Zustand übergehen und damit definitiv eingefangen werden. Die gesamte Lebensdauer des Zustands ist dann $1/4\pi\Gamma$, wobei

$$\Gamma = \Gamma_s + \Gamma_e \tag{28.30}$$

die halbe „Halbwertsbreite" des Zustandes ist, welche die Ungenauigkeit mißt, mit der infolge seiner endlichen Lebensdauer seine Energie definiert ist. Wir sehen nun Γ_s und Γ_e als gegeben an und suchen aus ihnen umgekehrt den Wirkungsquerschnitt σ für die Einfangung eines freien Neutrons in den quasistationären Zustand zu berechnen. Die in ihm eingefangenen Neutronen werden sich dann im Verhältnis Γ_s/Γ_e auf die Prozesse der Reemission und der definitiven Einfangung verteilen; die gemessenen Wirkungsquerschnitte für Streuung (σ_s) und Einfangung (σ_e) sind also durch die Gleichungen

$$\sigma_s + \sigma_e = \sigma; \qquad \sigma_s : \sigma_e = \Gamma_s : \Gamma_e \tag{28.31}$$

bestimmt.

Die Berechnung von σ ist gleichbedeutend mit der Aufstellung einer allgemeinen Absorptions- und Dispersionstheorie für Neutronenwellen. Sie wird ebenso wie die quantenmechanische Dispersionstheorie des Lichts (Dirac) dadurch etwas kompliziert, daß es sich um den Übergang zwischen zwei Zuständen handelt, die beide einem kontinuierlichen Spektrum angehören (der eine dem der freien Teilchen, der andere dem infolge der Dämpfung zu einem Kontinuum verbreiterten quasistationären Niveau). Zur Erleichterung der Überlegung pflegt man in solchen Fällen die Zustände des freien Teilchens als diskret zu behandeln, indem man annimmt, sie seien in einem Hohlraum gequantelt, dessen Volumen V man nachträglich über alle Grenzen wachsen läßt. Für die Wahrscheinlichkeit des Übergangs zwischen einem dieser diskreten Zustände und dem quasistationären Zustand ist das Matrixelement H_s der Wechselwirkungsenergie zwischen beiden Zuständen maßgebend, d. h. desjenigen Teils der Hamilton-Funktion des Gesamtsystems, der zu Übergängen zwischen den beiden Zuständen Anlaß gibt. Dieses Matrixelement ist proportional zur Amplitude der Eigenfunktion des freien Teilchens in dem Gebiet, in dem die Wechselwirkungsenergie von Null verschieden ist, d. h. im Kern; es geht daher mit wachsendem V gegen Null. Dafür erhöht sich mit wachsendem V die Zahl der Zustände des freien Teilchens pro Energieintervall, d. h. die Zahl der zur Gesamtübergangswahrscheinlichkeit beitragenden Matrixelemente, und man erhält im Grenzfall $V \to \infty$ nach Dirac (vgl. Math. Anhang II) die Gleichung

$$\Gamma_s = \frac{\pi |H_s|^2}{\hbar \Delta E}, \tag{28.32}$$

wobei ΔE den Abstand zweier benachbarter Energiewerte des freien Neutrons bei der Energie des betrachteten quasistationären Zustands bedeutet. ΔE läßt sich leicht aus dem Volumen V berechnen. Nimmt man etwa V der Einfachheit halber als kubisch an, so sind alle möglichen Wellenvektoren des Neutrons von der Form

$$k = \frac{1}{V^{1/3}}\{k, l, m\} \qquad (k, l, m \text{ ganze Zahlen}). \tag{28.33}$$

Die Anzahl solcher Vektoren, deren Beträge zwischen k und $k + dk$ liegen, ist $V \cdot 4\pi k^2 dk$, und da

$$k = \frac{1}{\lambda}; \quad dk = \frac{dE}{hv}, \tag{28.34}$$

so ist die Zahl der Zustände pro Energieeinheit, d. h. der reziproke Abstand benachbarter Energiewerte

$$\frac{1}{\Delta E} = \frac{4\pi V}{hv\lambda^2}. \tag{28.35}$$

Betrachten wir Γ_s als gegeben, so können wir nun σ berechnen. Wir führen analog zu Γ eine Dämpfungskonstante γ für die einfallende Welle ein, d. h. wir denken ihre ψ-Funktion mit dem Faktor $e^{-2\pi\gamma t}$ multipliziert. $4\pi\gamma\varrho V$ ist dann die Zahl der im ganzen pro Zeiteinheit verschwindenden Neutronen, wenn ihre räumliche Dichte ϱ ist. Der Wirkungsquerschnitt ist definiert als das Verhältnis dieser Zahl zur Zahl der pro Zeiteinheit durch die Flächeneinheit tretenden Neutronen; letztere ist bei Teilchen der Geschwindigkeit v durch ϱv gegeben. Also ist

$$\sigma = 4\pi\gamma V / v. \tag{28.36}$$

Wegen der endlichen Breite des Resonanzenergieintervalls ist γ für eine Reihe verschiedener Neutronenfrequenzen von Null verschieden. Sei $E = h\nu$ die Energie des Neutrons, so ist nach BREIT und WIGNER für $l = 0$

$$h\gamma = \frac{|H_s|^2 \Gamma}{h[(\nu - \nu_0)^2 + \Gamma^2]}. \tag{28.37}$$

Die Ableitung dieser Formel ist der von (28.32) weitgehend analog. Wir begnügen uns damit, sie anschaulich plausibel zu machen. H_s^2/h ist nach (28.32) das Maß für die Wahrscheinlichkeit eines Übergangs aus einem diskreten Zustand des freien Neutrons in einen gebundenen Zustand gleicher Energie; der Faktor $\Gamma/[(\nu - \nu_0)^2 + \Gamma^2]$ ist der Koeffizient, mit dem schon nach der klassischen Theorie die Frequenz ν in die Fourieranalyse der von einem Oszillator der Frequenz ν_0 und der Dämpfung Γ ausgesandten Strahlung eingeht; er mißt also gewissermaßen die Stärke, mit der der Endzustand an dem Prozeß beteiligt ist. Setzen wir nun in (28.36) γ aus (28.37) und V aus (28.35) ein und berücksichtigen (28.31), so folgt

$$\sigma_e = \frac{\lambda^2}{\pi}\frac{\Gamma_s\Gamma_e}{(\nu - \nu_0)^2 + \Gamma^2}; \quad \sigma_s = \frac{\lambda^2}{\pi}\frac{\Gamma_s^2}{(\nu - \nu_0)^2 + \Gamma^2}. \tag{28.38}$$

§ 29. Vergleich mit der Erfahrung

Der Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Neutronen an Protonen liegt bei Neutronenenergien von einigen Millionen Volt empirisch und nach (28.24b) theoretisch in der Gegend von $1 \cdot 10^{-24}$ cm^2; auch die langsame Zunahme mit abnehmender Neutronenenergie, die aus (28.24b) folgt, scheint mit der Erfahrung im Einklang zu sein. Für sehr langsame Neutronen liefert die Theorie dagegen um den Faktor ≈ 40 zu kleine Werte. Man kann nach WIGNER (vgl. 11a) versuchen, die Übereinstimmung zu verbessern, indem man Kräfte zwischen Proton und Neutron einführt, die von der gegenseitigen Spinorientierung beider Teilchen abhängen. Ein solcher Ansatz ist nach § 41 in der Tat nach der Theorie der Austauschkräfte sehr plausibel. Wenn man solche Kräfte einführt, spaltet der in § 15 berechnete Grundzustand des Deuterons auf in zwei Zustände, die sich durch die Spinorientierung unterscheiden. Die Erfahrung lehrt, daß der Zustand mit $j = 1$, in dem also die beiden Spins (in der Näherung, in der der Grundzustand noch als reiner S-Zustand aufgefaßt werden darf) parallel stehen, der tiefere ist. Man kann nun die spinabhängigen Kräfte so groß wählen, daß der Zustand mit antiparallelen Spins gerade in die Gegend der Bindungsenergie Null rückt; dann tritt bei der Streuung für diejenigen Neutronen, deren Spin antiparallel zu dem des jeweiligen streuenden Protons steht, eine Resonanz der in § 25 und 28 beschriebenen Art auf. Sei die Energie des Zustandes mit antiparallelen Spins E' (es ist dabei unwesentlich, ob er um E' über oder unter dem Nullniveau liegt, d. h. ob die Tangente der Wellenfunktion am Kernrand positiv oder negativ ist), so erhält man bei Berücksichtigung der statistischen Gewichte der beiden Zustände statt (28.24b) die Formel

$$Q = \frac{4\pi\hbar^2}{M}\left(\frac{1}{4(E'+E_0/2)} + \frac{3}{4(E+E_0/2)}\right). \tag{29.1}$$

Für E' muß man nach BETHE und BACHER (11a) die Größenordnung von 40000 Volt wählen, um die Erfahrung darzustellen. Man kann die Spinabhängigkeit ausdrücken, indem man für die Austauschkraft eine Summe der beiden Ansätze I und II des § 14 mit geeigneten Koeffizienten wählt; man muß nach FEENBERG und KNIPP (30) größenordnungsmäßig eine Mischung von 80% Ansatz II und 20% Ansatz I wählen. Freilich wäre eine unabhängige Bestätigung dieses Ergebnisses notwendig, um sicherzustellen, daß der große Wirkungsquerschnitt zwischen Protonen und langsamen Neutronen nicht auf einem anderen bisher übersehenen Effekt beruht. Über den Prozeß der Bildung von Deuteronen unter γ-Emission beim Stoß zwischen Neutron und Proton vgl. § 34. Eine ausführliche

Diskussion aller Wechselwirkungsprozesse zwischen Neutron und Proton geben BETHE und BACHER (11a).

Daß das Einkörpermodell zur Darstellung der Erfahrungen an schweren Kernen nicht ausreicht, wurde bereits in § 25 gezeigt. Trotzdem wäre es denkbar, daß seine Ergebnisse für diejenigen Kerne und Neutronenenergien, bei denen man sich nicht in der Nachbarschaft eines quasistationären Niveaus befindet, durchaus brauchbar wären; man wird diese Möglichkeit bei der Diskussion unserer Erfahrungen über dieses experimentell noch unvollständig bekannte Gebiet jedenfalls im Auge behalten müssen. Eine berechtigte Anwendung des Modells ist es vielleicht auch, alle Werte der Phase ε als a priori gleich wahrscheinlich anzusetzen und so die relative Häufigkeit der verschiedenen Größenordnungen von Wirkungsquerschnitten abzuschätzen. Denn während die direkte Berechnung von ε aus dem Modell des Potentialtopfes nach VAN VLECK (91) Resultate liefert, die mit der Erfahrung unvereinbar sind (vgl. § 25), verwendet diese, von BETHE (10) vorgeschlagene statistische Behandlung die Begriffe des Einkörpermodells im wesentlichen nur für das Verhalten der Wellenfunktion außerhalb des Kerns; in der Tat ist die in Fig. 23 (S. 120) dargestellte Verteilung der Wirkungsquerschnitte auf die verschiedenen Größenordnungen in guter Übereinstimmung mit der BETHEschen Statistik.

Wir versuchen einen mehr quantitativen Vergleich mit der Erfahrung für die aus dem Mehrkörpermodell folgenden Formeln (28.38) durchzuführen. Dazu ist eine Abschätzung der Größenordnung der Breiten Γ_e und Γ_s und der Dichte der quasistationären Niveaus notwendig. Wir geben zunächst die Überlegungen von BREIT und WIGNER (17, vgl. S. 132) wieder, um dann einige Punkte zu nennen, in denen sie abgeändert oder erweitert werden müssen. Für die Lebensdauern angeregter Zustände gegen Emission von γ-Strahlen bei Dipolübergängen, finden wir im vierten Abschnitt (§ 32 und 34) die Größenordnung von 10^{-14} bis 10^{-15} sec $\approx 10^7$ bis 10^6 „Umläufen" eines schweren Teilchens im Kerninnern. BREIT und WIGNER setzen die Dämpfungsbreite des quasistationären Zustandes, die durch die Möglichkeit der γ-Emission bedingt ist, daher gleich dem Bruchteil 10^{-6} bis 10^{-7} der Anregungsenergie, und da diese etwa gleich der Bindungsenergie des Neutrons, d. h. von der Größenordnung 10^7 Volt ist, berechnen sie die Wirkungsquerschnitte unter den beiden Annahmen $\hbar\Gamma_e = 1$ Volt und $\hbar\Gamma_e = 10$ Volt.

Um Γ_s zu berechnen, ist es notwendig, H_s zu kennen. Das Einkörpermodell ist derjenige Grenzfall, in dem der Zustand, in welchem der Ausgangskern im Grundzustand verharrt und das stoßende Neutron sich in

seinem festen Feld bewegt, eine strenge Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung des Gesamtsystems darstellt, in dem es also keine Übergänge zwischen dem Zustand des freien Neutrons und dem des quasistationär angeregten Kerns gibt. BREIT und WIGNER versuchen eine Näherungslösung von diesem Grenzfall des Einkörpermodells aus. Sie setzen daher H_s gleich dem Matrixelement der Differenz zwischen der wirklichen HAMILTON-Funktion des Mehrkörperproblems und der HAMILTON-Funktion des Einkörperproblems und wählen für diese Differenz $\overline{H}$ unabhängig vom Ort des Neutrons im Kern den Wert von 0,5 (oder in einigen Fällen 0,1) Millionen Volt, was nach den Vorstellungen von BOHR (§ 23) sicher nicht zu niedrig gegriffen ist. Sie beschränken ferner die Betrachtung, analog zum Einkörpermodell, auf S-Zustände des einfallenden Neutrons ($l = 0$). Normiert man deren Eigenfunktionen in einem Volumen der Größe $4\pi/3 \cdot R^3$, so hat die Eigenfunktion im Kerninnern nach (28.10) und (28.18) die Amplitude $\sqrt{E/V_0 R} \cdot 1/\cos\varepsilon$. Wir wollen annehmen, es trete nicht gleichzeitig mit dem quasistationären Zustand eine Resonanz von dem im Einkörpermodell behandelten Typ auf und setzen daher für eine Größenordnungsabschätzung $\varepsilon = 0$. H_s ist das Matrixelement von $\overline{H}$ zwischen dieser Eigenfunktion und der des im Kern gebundenen Neutrons. Da die letztere so normiert ist, daß ihr Quadrat, integriert über das Kernvolumen, eins ist, wird H_s im wesentlichen gleich $\overline{H}$, multipliziert mit demjenigen Bruchteil der gesamten Eigenfunktion des „freien" Neutrons, der sich im Kern befindet:

$$H_s \sim \overline{H} \sqrt{\frac{E r_0}{V_0 R}}\,. \tag{29.2}$$

Die Anzahl von S-Zuständen (die sich wegen der Festlegung des Drehimpulses auf $l = 0$ nur noch in einer, der radialen Quantenzahl voneinander unterscheiden können) zwischen k und $k + dk$ ist $2R\,dk$ und daher nach (28.34) die Anzahl pro Energieintervall

$$\frac{1}{\Delta E_s} = \frac{2R}{hv}\,; \tag{29.3}$$

so erhält man aus (28.32) und (29.2)

$$h\Gamma_s \approx \frac{\overline{H}^2 r_0}{2\lambda V_0} \tag{29.4}$$

und

$$\sigma_e \approx \frac{\lambda r_0}{2\pi}\,\frac{\overline{H}}{V_0}\,\frac{\overline{H} h \Gamma_e}{h^2(\Gamma_e + \Gamma_s)^2 + (E - E_0)^2}\,. \tag{29.5}$$

Für $V_0 = 10^7$ Volt, $r_0 = 3 \cdot 10^{-13}$ cm sind die aus (29.4) und (29.5) bei verschiedenen Annahmen über Γ_e und $\overline{H}$ folgenden Γ_s und σ_e, für

verschiedene Lage des Resonanzniveaus $h\nu_0$ und Neutronenenergien, die einerseits gleich $^1/_{40}$ Volt (thermische Geschwindigkeiten), andererseits gleich der Resonanzenergie sind, angegeben.

Tabelle 8. Berechnete Wirkungsquerschnitte für Neutroneneinfang. (Nach BREIT und WIGNER)

Lage der Resonanz in Volt	$\overline{H}$ in 10^6 Volt	$h\Gamma_e$ in Volt	$h\Gamma_s$ an der Resonanzstelle in Volt	σ in 10^{-24} cm²	
				an der Resonanzstelle	bei thermischen Energien
$^1/_{40}$	0,1	10	0,01	90000	
	0,1	1	0,01	900000	
1	0,1	10	0,05	14000	
	0,1	1	0,05	140000	
50	0,1	10	0,37	2000	3500
	0,5	10	9	13400	80000
	0,1	1	0,37	11000	350
	0,5	1	9	4800	9000
1000	0,1	10	1,6	320	9
	0,5	10	40	420	200
10000	0,1	10	5	60	0,09
	0,5	10	125	18	2

Man erkennt aus den Werten für $h\Gamma_s$, daß für Resonanzen bei sehr langsamen Neutronen die Einfangwahrscheinlichkeit tatsächlich, wie es durch eine Reihe von Erfahrungen gefordert wird, die Streuwahrscheinlichkeit weit überwiegt. Die Wirkungsquerschnitte erreichen Größenordnungen, welche zur Erklärung aller in der Erfahrung gefundenen Werte hinreichen. Sie sind, wenn die Resonanzstelle überhaupt deutlich vom Gebiet der thermischen Energie getrennt ist, nicht nur für Neutronenenergien in der Umgebung der Resonanzenergie, sondern auch stets für thermische Energien sehr groß, und zwar gehen sie für langsame Neutronen, so wie es auch aus dem Einkörpermodell folgt, mit $1/v$. Dies steht im Einklang mit der empirischen Tatsache, daß die sogenannten C-Neutronen (Neutronen bestimmter, allen Anzeichen nach thermischer Energie, die von Cadmium stark absorbiert werden) in allen Elementen eine starke Absorption erleiden, im Gegensatz zu den durch die Resonanz in anderen Elementen definierten Neutronengruppen bestimmter Energie.

Immerhin können diese Abschätzungen nur als Mittel zur vorläufigen Orientierung gelten. Zunächst ist es in diesem Problem theoretisch sehr unbefriedigend, mit Formeln zu rechnen, die auch nur als Ausgangspunkt eines Näherungsverfahrens das Einkörpermodell verwenden. Während die Formeln (28.38) ganz unabhängig von derartigen Modellvoraussetzungen abgeleitet sind, wird man daher die durch (29.4) gegebene Energieabhängigkeit

von Γ_s noch nicht als wohlbegründet ansehen dürfen. Ferner scheint die Erfahrung zu zeigen, daß die Werte für Γ_e zu hoch gegriffen sind, da eine Reihe empirischer Bestimmungen von Resonanzbreiten zur Größenordnung von 0,1 Volt für $h\Gamma$ geführt hat. Dies ist mit den Abschätzungen des § 32 durchaus vereinbar. Schließlich wird man sich in vielen Fällen nicht auf die Berücksichtigung eines quasistationären Niveaus beschränken können. Der Abstand der aus natürlich radioaktiven Kernen bekannten angeregten Zustände (vgl. § 33) ist zwar von der Größenordnung 10^5 Volt. Jedoch ist, wie BOHR bemerkt hat, bei den sehr viel höheren Anregungsenergien, um die es sich in unserem Fall handelt, wegen der mit der Anregungsenergie wachsenden Fülle von Möglichkeiten der Verteilung des Energiebetrags auf die Kernbausteine ein Zusammenrücken der Zustände zu erwarten. Nach einer Abschätzung von BETHE und PLACZEK[1]), die mit dem empirischen Material durchaus verträglich zu sein scheint, hat man bei Kernen mittleren Atomgewichts einen mittleren Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden, zum Neutroneneinfang befähigten Niveaus von etwa 10 bis höchstens 100 Volt zu erwarten.

Deutliche Widersprüche zwischen Theorie und Erfahrung scheinen nach diesen Betrachtungen nicht mehr zu bestehen. Ein mehr ins einzelne gehender Vergleich wird wohl in absehbarer Zeit möglich werden.

§ 30. Theorie der Umwandlung durch geladene Teilchen

Geladene Teilchen werden, schon ehe sie in den Wirkungsbereich der eigentlichen Kernkräfte kommen, durch das Coulombfeld aus ihrer ursprünglichen Bewegung abgelenkt. Die Voraussetzung einer Theorie der Umwandlung durch geladene Teilchen ist daher eine Theorie ihrer Bewegung im rein COULOMBschen Feld. Diese Theorie wurde von GORDON (47) entwickelt. Ihre Anwendung auf Kernprobleme ist in der vollständigsten Form von SEXL (85) ausgearbeitet worden. Wir beschränken uns hier darauf, den Gang der GORDONschen Ableitung des RUTHERFORDschen Streugesetzes ohne Durchführung der Beweise darzustellen[2]), und schließen eine analoge Begründung der für die Deutung der anomalen Streuung und der Umwandlung durch geladene Teilchen notwendigen Formeln an.

Die Bewegung geladener Teilchen im Coulombfeld kann nicht ohne weiteres nach den Methoden des § 27 behandelt werden, weil sich die

---

[1]) Im Erscheinen. Ich danke Herrn PLACZEK für die freundliche Mitteilung seiner Ergebnisse.

[2]) Vgl. die ausführliche Erörterung bei MOTT und MASSEY (70).

Wellenfunktionen im Coulombfeld auch in großem Abstand vom Kern nicht wie gewöhnliche Kugelwellen verhalten. Dies geht am einfachsten daraus hervor, daß die Wellenfunktionen asymptotisch durch $e^{\frac{i}{\hbar}\int p_r\,dr}$ gegeben sein müssen. Nun ist bei zwei geladenen Teilchen der Ladungen $Z_1 e$ und $Z_2 e$ und der für die Relativbewegung im Schwerpunktssystem maßgebenden effektiven Masse μ

$$p_r = \sqrt{2\mu\left(E - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}\right)}, \tag{30.1}$$

also für große r

$$\begin{aligned}\int p_r\,dr &\approx \sqrt{2\mu E}\cdot r - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\sqrt{2E/\mu}}\ln r + \text{const}\\ &= \sqrt{2\mu E}\cdot r - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{v}\ln r + \text{const}\end{aligned} \tag{30.2}$$

($v =$ Geschwindigkeit im Unendlichfernen). Die Wellenfunktionen verhalten sich also asymptotisch wie

$$\psi_\infty = e^{ikr - i\gamma \ln 2kr}, \tag{30.3}$$

wobei

$$\gamma = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} \tag{30.4}$$

gesetzt und über die additive Konstante geeignet verfügt ist. Dieses Verhalten ist der direkte Ausdruck der Tatsache, daß in der klassischen Theorie die Gleichung einer Fläche, die von allen Hyperbelbahnen eines parallel zur Z-Achse einfallenden Teilchenstroms senkrecht geschnitten wird (also der Wellenfront im Sinne der wellenmechanischen Ausdeutung des MAUPERTUISschen Prinzips) asymptotisch für große z nicht $z = \text{const}$, sondern

$$z + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{m v^2}\ln k(r - z) = \text{const} \tag{30.5}$$

lautet.

An die Stelle der Gleichung (27.11) tritt also im Coulombfeld die Gleichung

$$\chi_l(r\to\infty) = \frac{a_l \sin(kr - \gamma\ln 2kr - l\pi/2 + \delta_l)}{kr}. \tag{30.6}$$

Gilt das Coulombfeld exakt bis zum Punkte $r = 0$, so liefert die Wellenmechanik für δ_l den Wert

$$\delta_l = \arg\Gamma(l + 1 + i\gamma). \tag{30.7}$$

Die genauere Berechnung der Wellenfunktionen im Coulombfeld ist jedoch eine etwas kompliziertere Aufgabe. Nach dem RUTHERFORDschen Streugesetz ist der Wirkungsquerschnitt für die Ablenkung eines Teilchens von einem Kraftzentrum in den Raumwinkel $d\omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ durch

$$Q(\vartheta)\,d\omega = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2 m v^2 \sin^2\vartheta/2}\right)^2 d\omega \tag{30.8}$$

gegeben. Es wird also möglich sein, die Wellenfunktion analog zu (27.12) in der Form

$$\psi(r\to\infty) = I + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2mv^2 \sin^2 \vartheta/2} S \tag{30.9}$$

zu schreiben, wobei I die einfallende Welle, S die gestreute Kugelwelle darstellt.

Gordon hat für ψ die Lösung angegeben

$$\psi(r,\vartheta) = e^{-\frac{\pi}{2}\gamma}\Gamma(1+i\gamma)\, e^{ikr\cos\vartheta} F[-i\gamma, 1, ikr(1-\cos\vartheta)], \tag{30.10}$$

wobei F bis auf Faktoren die konfluente hypergeometrische Funktion ist. F besitzt die Reihenentwicklung

$$F(a,b,x) = 1 + \frac{a}{b\cdot 1!}x + \frac{a(a+1)}{b(b+1)\cdot 2!}x^2 + \cdots \tag{30.11}$$

und verhält sich asymptotisch für große x wie

$$\left.\begin{aligned} F(a,b,x\to\infty) &= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)}(-x)^{-a}\left(1 + \frac{a(a-b+1)}{x} + \cdots\right) \\ &+ \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^x x^{a-b}\left(1 + \frac{(1-a)(b-a)}{x} + \cdots\right). \end{aligned}\right\} \tag{30.12}$$

Daraus erhält man für das asymptotische Verhalten von ψ in der Tat (mit $z = r\cos\vartheta$)

$$\left.\begin{aligned} \psi(r, z\to\infty) &= e^{ikz + i\gamma\ln k(r-z)}\left[1 - \frac{\gamma^2}{ik(r-z)}\right] \\ &- \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2mv^2 \sin^2\vartheta/2}\,\frac{e^{ikr - i\gamma\log k(r-z) + 2i\delta_0}}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{30.13}$$

Ferner kann man die Lösung (30.10) wieder nach Kugelfunktionen entwickeln und erhält

$$\psi(r,\vartheta) = \sum_0^\infty (2l+1)\, i^l e^{i\delta_l} L_l(r) P_l(\cos\vartheta), \tag{30.14}$$

wobei

$$L_l(r) = e^{-\frac{\pi}{2}\gamma}\frac{|\Gamma(l+1+i\gamma)|}{(2l+1)!}(2kr)^l e^{ikr} F(i\gamma + l + 1, 2l+2, -2ikr). \tag{30.15}$$

Das asymptotische Verhalten von L_l ist durch

$$L_l(r\to\infty) = \frac{1}{kr}\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} - \gamma\ln 2kr + \delta_l\right) \tag{30.16}$$

gegeben.

Wenn nun das Coulombsche Kraftfeld im Kerninnern durch ein abgeändertes Feld zu ersetzen ist, so wird das asymptotische Verhalten der Lösungen von (27.6) durch

$$\chi_l(r\to\infty) = \frac{a_l}{kr}\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} - \gamma\ln 2kr + \delta_l + \eta_l\right) \tag{30.17}$$

gegeben sein. Die einer einfallenden ebenen Welle samt der durch sie erzeugten Streuwelle entsprechende Lösung lautet dann offenbar asymptotisch

$$\left.\begin{aligned} &\psi(r\to\infty,\vartheta)\\ &=\sum_0^\infty(2l+1)i^l e^{i(\delta_l+\eta_l)}\frac{1}{kr}\sin\left(kr-\frac{l\pi}{2}-\gamma\ln 2kr+\delta_l+\eta_l\right)P_l(\cos\vartheta)\\ &=\sum_0^\infty(2l+1)i^l e^{i\delta_l}\frac{1}{kr}\sin\left(kr-\frac{l\pi}{2}-\gamma\ln 2kr+\delta_l\right)P_l(\cos\vartheta)\\ &\quad+\sum_0^\infty(2l+1)i^l e^{2i\delta_l}\frac{1}{kr}e^{kr-\frac{l\pi}{2}-\gamma\ln 2kr}\left(e^{2i\eta_l}-1\right)P_l(\cos\vartheta)\,. \end{aligned}\right| \qquad (30.18)$$

In diesem Ausdruck stellt die letzte Zeile analog zu (27.17) die Abweichung von der rein COULOMBschen Streuung dar, während die erste Zeile zum Ausdruck (30.13) zusammengefaßt werden kann. Für das Intensitätsverhältnis des wirklichen Streuquerschnitts zum rein COULOMBschen erhält man schließlich aus (30.18) und (30.13)

$$R(\vartheta)=\left|1+\frac{i}{\gamma}\sin^2\frac{\vartheta}{2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)e^{2i(\delta_l-\delta_0)}\left(e^{2i\eta_l}-1\right)P_l(\cos\vartheta)\right|^2. \qquad (30.19)$$

In dieser Gleichung, die das Analogon zu (27.18) darstellt, sind die Phasen δ_l durch (30.7) bestimmt; die Werte der η_l hängen von der Abweichung vom COULOMBschen Gesetz im Kerninnern ab.

An dieser Stelle werde die in § 24, Regel 4, erwähnte Abweichung vom COULOMBschen Gesetz besprochen, die auftritt, wenn ein Teilchen an einem ihm gleichartigen gestreut wird. Sie rührt davon her, daß dann die Wellenfunktion, welche den Stoßvorgang beschreibt, symmetrisch oder antisymmetrisch sein muß gegenüber der Vertauschung der Koordinaten der beiden Teilchen, je nachdem ob die Teilchen der BOSE- oder FERMI-Statistik genügen. Die Vertauschungsoperation läßt den Schwerpunkt der beiden Teilchen ungeändert und vertauscht den Vektor der Relativkoordinaten $\mathfrak{r}$ mit $-\mathfrak{r}$. Unsere Eigenfunktion $\psi(\mathfrak{r})$ ist gegen diese Operation weder symmetrisch noch antisymmetrisch; sie ist also zu ersetzen durch

$$\psi_\pm(\mathfrak{r})=\psi(\mathfrak{r})\pm\psi(-\mathfrak{r}). \qquad (30.20)$$

Für R erhält man dann nach MOTT (72)

$$R_\pm=\frac{\left|\frac{1}{\sin^2\vartheta}e^{-i\gamma\ln\sin^2\vartheta}\pm\frac{1}{\cos^2\vartheta}e^{-i\gamma\ln\cos^2\vartheta}\right|^2}{\frac{1}{\sin^4\vartheta}+\frac{1}{\cos^4\vartheta}}. \qquad (30.21)$$

Die Formel ist gegen Vertauschung von ϑ und $(\pi-\vartheta)$, d. h. von stoßendem und gestoßenem Teilchen symmetrisch. Für spinlose Teilchen mit

Bose-Statistik (α-Teilchen) gilt R_+. Teilchen mit Fermi-Statistik (z. B. Protonen) haben stets einen Spin und können daher sowohl symmetrische wie antisymmetrische räumliche Wellenfunktionen haben, deren Wirkungen mit den durch die möglichen Spinkombinationen gegebenen Gewichten addiert werden. Es gilt für Teilchen vom Drehimpuls $l\hbar$ ($l = \frac{1}{2}$ für Protonen)

$$R = \begin{cases} \frac{1}{2l+1}[lR_+ + (l+1)R_-] & \text{(Fermi-Statistik)} \\ \frac{1}{2l+1}([l+1)R_+ + lR_-] & \text{(Bose-Statistik).} \end{cases} \tag{30.22}$$

Wir kehren zum Fall ungleicher Teilchen zurück. Um die Berechnung der Umwandlungswahrscheinlichkeit ebenso wie durch (30.19) die der Streuwahrscheinlichkeit auf eine Berechnung der Phasen η_l zurückzuführen und das Verhalten der η_l diskutieren zu können, betrachten wir den Verlauf der ψ-Funktion noch etwas näher. Wir können nach (30.14) und (30.18) schreiben

$$\psi(r \to \infty, \vartheta) = \sum_0^\infty (2l+1) i^l e^{i\delta_l} [L_l(r) + \zeta_l M_l(r)] P_l(\cos\vartheta), \tag{30.23}$$

wobei sich dann $M_l(r)$ asymptotisch wie

$$M_l(r \to \infty) = \frac{1}{kr} e^{i\left(kr - l\pi/2 - \gamma \ln 2kr\right)} \tag{30.24}$$

verhält und

$$\zeta_l = e^{i\delta_l}(e^{2i\eta_l} - 1) \tag{30.25}$$

gesetzt ist. M_l ist wie L_l eine Lösung von (27.6) für das Coulombfeld. Sie besitzt die Integraldarstellung

$$M_l(r) = e^{-\frac{\pi}{2}\gamma} |\Gamma(l+1+i\gamma)| \frac{(2kr)^l e^{ikr}}{\pi} \int \left(1 + \frac{2ikr}{t}\right)^{-l-1-i\gamma} e^t t^{-(2l+2)} dt, \tag{30.26}$$

wobei die Integration auf einem Weg von $t = -\infty$ zwischen den Punkten $-2ikr$ und 0 hindurch im positiven Sinn um den Punkt 0 herum und nach $-\infty$ zurückzuführen ist. Eine ausführliche, für numerische Rechnungen brauchbare Übersicht über das Verhalten von L_l und M_l findet sich bei Yost, Wheeler und Breit (101).

Im Kerninnern setzen wir das Potential wie im Problem des α-Zerfalls als konstant an; die zur l-ten Kugelfunktion gehörige Lösung ist dann dort durch

$$u_l(r) = \alpha_l \sqrt{\frac{\pi}{2Kr}} J_{l+\frac{1}{2}}(Kr) \tag{30.27}$$

gegeben. An der Stelle $r = r_0$ müssen also die Bedingungen gelten:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_l u_l(r_0) &= e^{i\delta_l}[L_l(r_0) + \zeta_l M_l(r_0)] \\ \alpha_l u_l'(r_0) &= e^{i\delta_l}[L_l'(r_0) + \zeta_l M_l'(r_0)]. \end{aligned}\right\} \tag{30.28}$$

Hieraus ergibt sich (der übersichtstörende Index l ist an M, L und u fortgelassen):

$$\alpha_l = e^{i\delta_l}\left(\frac{LM' - ML'}{uM' - Mu'}\right)_{r_0} = e^{i\delta_l}\frac{L(r_0)}{u(r_0)}\left(\frac{\frac{\partial}{\partial r}\log\frac{M}{L}}{\frac{\partial}{\partial r}\log\frac{M}{u}}\right)_{r_0}, \tag{30.29}$$

$$\zeta_l = \left(\frac{u'L - Lu'}{u'M - Mu'}\right)_{r_0}. \tag{30.30}$$

Man erkennt, daß Resonanz eintritt, d. h. daß sowohl die durch α_l gegebene Amplitude der Wellenfunktion im Kerninnern wie die durch ζ_l gegebene Amplitude der Streuwelle groß wird, wenn sich u'/u an der Stelle r_0 dem Werte von M'/M nähert (anschaulich: wenn die Welle u_l im Kerninnern schon mit der auslaufenden Welle M_l allein nahezu die Aneinanderfügungsbedingung am Kernrand befriedigt und daher die Primärwelle L_l, um diese Bedingung nicht zu verletzen, nur ein kleiner Zusatz zu u_l und M_l sein darf). Genau gleich können die beiden Werte nicht werden, da M'/M einen — allerdings bei breiter Potentialschwelle exponentiell kleinen — imaginären Anteil besitzt, während u_l reell ist. Dieser kleine imaginäre Anteil bestimmt die Breite des Resonanzgebietes.

Der gesamte Wirkungsquerschnitt für die Umwandlung wird nunmehr

$$\sigma = \frac{1}{v}\sum_0^\infty (2l+1)\, w_l 4\pi\, |\alpha_l|^2 \int_0^{r_0} u_l^2 r^2 dr\,, \tag{30.31}$$

worin w_l die mittlere Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit dafür bedeutet, daß ein in den Kern eingedrungenes Teilchen vom Drehimpuls l einen Übergang hervorruft. Diese Wahrscheinlichkeit ist nach § 24 von der Größenordnung 1; über einen Sonderfall beim Prozeß ${}^7_3\text{Li}$ (p, α) ${}^4_2\text{He}$ vgl. § 31. —

Alle wesentlichen physikalischen Konsequenzen der vorstehenden Rechnungen ergeben sich schon bei der Betrachtung des Spezialfalls, der eintritt, wenn die Energie der stoßenden Teilchen hinreichend klein ist und daher nur Teilchen mit $l = 0$ in den Kern eindringen. Für die elastische Streuung ergibt sich in diesem Fall aus (30.19) die einfache Formel

$$R_0 = \left|1 + \frac{i}{\gamma}(e^{2i\eta_0} - 1)\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right|^2, \tag{30.32}$$

was bei kleinen Werten von η_0 in

$$R_0 \approx \left(1 - \frac{2\eta_0}{\gamma}\sin^2\vartheta\right)^2 \tag{30.33}$$

übergeht. Da η_0 und γ nur noch von der Energie des stoßenden Teilchens abhängen, zeigen diese Formeln, daß man die gesamte Winkelverteilung

der gestreuten Teilchen theoretisch kennt, wenn man die Intensität bei einem bestimmten Winkel gemessen hat. Diese Tatsache enthält zugleich in quantitativer Form die in § 24 ausgesprochene Regel, daß die anomale Streuung bei allen Winkeln gleichzeitig merkbar wird. — Wichtig ist ferner das Vorzeichen von η_0. Man findet aus (30.25) und (30.30), daß alle η_l bei Potentialen der Form von Fig. 18 für hinreichend geringe Energien des stoßenden Teilchens positiv sind. Anschaulich läßt sich das etwa so deuten: Denkt man sich zunächst innerhalb von $r = r_2$ ein unendlich hohes Potential, so wäre die innere Randbedingung der Wellenfunktion im Außenraum: Verschwinden bei $r = r_2$; die Phase wäre durch die Lage von r_2 bestimmt. Läßt man dieses gedachte Potential bis zum COULOMBschen Verlauf abnehmen, so erhält die Wellenfunktion die Möglichkeit, in das Gebiet $r < r_2$ exponentiell abnehmend einzudringen, und hat bei r_2 schon einen bestimmten endlichen Wert. Dies wirkt so, wie wenn der Punkt, an dem sie verschwinden muß, ein wenig nach innen gerückt wäre; damit wächst die Phase weit außen an auf den durch (30.7) gegebenen Wert δ_l. Nimmt das Potential innen noch weiter ab, so vermag die Wellenfunktion noch tiefer einzudringen, ihr Wert bei r_2 nimmt weiter zu und die Phase erhält noch den positiven Zusatz η_l. Positives η_0 bedeutet nach (30.33) Abnahme der Streuung unter den RUTHERFORDschen Wert, wie in § 24 angegeben; unsere Überlegung ist in der Tat nur eine strenge Formulierung der dort für dieses Verhalten gegebenen Erklärung. Diese Betrachtungen gelten jedoch nicht mehr in der Umgebung und oberhalb der Resonanzstellen, bei denen die Eigenfunktion mit großer Amplitude in den Kern eindringt; dort können die Phasen in der Tat jeden Wert annehmen.

Analog können wir den Umwandlungsquerschnitt diskutieren. Wir nehmen wieder an, daß nur Teilchen mit $l = 0$ zum Prozeß beitragen. Ferner sehen wir $\gamma k r_0$ als klein an, d. h. setzen $r_0 \ll \hbar^2/Ze^2\mu$; es genügt dann, bei der logarithmischen Ableitung M durch const/r zu ersetzen. Man erhält

$$\alpha_0 \approx e^{i\delta_0} \frac{L_0(r_0)}{u_0(r_0)} \left(\frac{\dfrac{\partial}{\partial r} \ln(r L_0)}{\dfrac{\partial}{\partial r} \ln(r u_0)} \right)_{r_0}. \tag{30.34}$$

Aus (30.15) entnehmen wir, daß $L_0(r)$ für kleine r durch

$$L_0(0) = e^{-\frac{\pi}{2}\gamma} |\Gamma(1 + i\gamma)| = \left(\frac{2\pi\gamma}{e^{2\pi\gamma} - 1} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{30.35}$$

ersetzt werden kann. Also wird, wenn die Phase $K r_0$ nicht zu nahe an einer der Resonanzstellen $\pi/2,\ 3\pi/2\ \ldots$ liegt, in Analogie zu (28.18)

$$\alpha_0 \approx e^{i\delta_0}\left(\frac{2\pi\gamma}{e^{2\pi\gamma}-1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\cos K r_0} \tag{30.36}$$

und

$$\sigma_0 = \frac{w_0}{v}\,\frac{8\pi^2\gamma}{e^{2\pi\gamma}-1}\,\frac{1}{K^2\cos^2 K r_0}\int\limits_0^{r_0}\sin^2 Kr\,dr\,. \tag{30.37}$$

Bei sehr kleinen Geschwindigkeiten ändert sich also der Wirkungsquerschnitt wie $\frac{1}{v^2}e^{-\frac{2\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}}$, und dieses Resultat bleibt nach seiner Ableitung auch noch richtig, wenn die Bedingung $\gamma k r_0 \ll 1$ nicht mehr erfüllt ist; nur der Zahlwert des Faktors ändert sich dann.

Das Verhalten von σ bei höheren Geschwindigkeiten hängt von der Lage der Resonanzstellen ab und läßt sich nicht allgemein ableiten; immerhin muß der exponentielle Verlauf so lange im wesentlichen beibehalten werden, bis die Energie den Gipfel der Potentialschwelle erreicht hat. Zum quantitativen Vergleich mit der Erfahrung kann man also versuchen, in jedem einzelnen Fall durch Wahl geeigneter Werte von r_0 und V_0 die Resonanzstellen so zu legen, daß die empirische Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von der Energie möglichst gut wiedergegeben wird. Der Tatsache, daß im Kerninnern eine Umwandlung stattfindet, kann man wieder wie in § 28 durch einen Absorptionskoeffizienten des Kerninnern Rechnung tragen. Die Absorption wird die sehr scharfen Resonanzen bei kleinen Energien erheblich stören, nicht aber die verwaschenen bei höheren Energien.

§ 31. Vergleich mit der Erfahrung

Daß die oben entwickelte Theorie die allgemeinen Züge der Erfahrung richtig wiedergibt, wurde schon im § 30 gezeigt. Wir beschränken uns daher hier darauf, einige typische Beispiele anzugeben und eine Reihe scheinbar aus dem Rahmen fallender Sonderergebnisse zu besprechen.

Die Abweichungen der elastischen Streuung vom RUTHERFORDschen Gesetz sind nur bei den leichtesten Kernen schon bei hinreichend niedrigen Energien so ausgeprägt, daß man versuchen kann, einen quantitativen Schluß auf das Kernpotential zu ziehen. Bei der Streuung von α-Teilchen in Helium zeigte sich zunächst die infolge der Gleichheit der beiden Stoßpartner geforderte, durch (30.21) dargestellte Abweichung. Fig. 22 zeigt für kleine Geschwindigkeiten den aus dieser Gleichung für $\vartheta = 45°$ für R_+

folgenden Wert 2. Die Abweichungen bei größeren Geschwindigkeiten, die von den Kernkräften verursacht sein müssen, versuchte TAYLOR (88) durch die Annahme eines schematisierten Potentials vom Typ der Fig. 18 darzustellen; dabei ergab sich jedoch eine mit der Kleinheit der Bindungsenergien der α-Teilchen in ${}^{8}_{4}\mathrm{Be}$, ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ ... unvereinbare Tiefe des Potentialloches ($r_0 \approx 3{,}5 \cdot 10^{-13}$ cm, $V_0 = 15{,}6 \cdot 10^6$ Volt). Nach einer Bemerkung von DELBRÜCK[1]) könnte man durch die Einführung eines sehr großen abstoßenden Potentials bei sehr kleinen Teilchenabständen ebenfalls Übereinstimmung erzielen. Da jedoch dabei potentielle Energien von vielleicht 10^8 Volt nötig wären, erscheint es geratener, dieses Modell des „Aschenkegels im Potentialkrater" nur als eine Andeutung der Abweichung der Wirklichkeit vom Einkörpermodell anzusehen, welche für die Wechselwirkung zweier α-Teilchen direkt aus den im § 18 wiedergegebenen Überlegungen von HEISENBERG folgt.

Eine ebenfalls durch die Gleichheit der Teilchen erklärbare Abweichung vom RUTHERFORDschen Gesetz tritt bei der Streuung von Protonen in Wasserstoff auf. Außerdem ist neuerdings bei Energien $> 6 \cdot 10^5$ Volt eine anomale Streuung von Protonen an Protonen entdeckt worden (96). Nach den neuesten Messungen von TUVE, HEYDENBURG und HAFSTAD[2]) ergibt sich eine Energie- und Winkelabhängigkeit der Streuung, die durch eine von einem anziehenden Potential verursachte zusätzliche kugelsymmetrische Streuwelle ($l = 0$) erklärt werden kann. Da die Beobachtungen somit bisher nur die e i n e Größe η_0 zu bestimmen gestatten, kennt man durch sie nur eine Beziehung zwischen den Bestimmungsgrößen des Potentialgesetzes; wenn man etwa ein Potentialloch von der Tiefe V und dem Radius r ansetzt, die Größe Vr^2. Wählt man $r = e^2/mc^2$, so folgt für V nach BREIT und CONDON[2]) etwa 10 Millionen Volt.

Ein Vorgang, der bei den bisherigen Betrachtungen nicht berücksichtigt wurde, ist die vor kurzem von SCHNETZLER (82) bei Beschießung von Lithium mit α-Strahlen zum erstenmal mit Sicherheit festgestellte unelastische Streuung unter nachträglicher Emission eines γ-Quants. Sie beruht darauf, daß das stoßende Teilchen einen Teil seiner Energie zur Anregung eines höheren stationären Zustandes des Kerns abgibt; sie kann daher erst oberhalb einer bestimmten Energiegrenze einsetzen. Dagegen ist ihr Eintreten nicht daran gebunden, daß das Teilchen das Kerninnere erreicht, da es die Bewegung der Kernbausteine schon von außen durch

[1]) Für deren briefliche Erläuterung ich Herrn DELBRÜCK bestens danke.

[2]) Im Erscheinen. Angaben nach einem Vortrag von E. TELLER auf der Kopenhagener Tagung Juni 1936.

sein Coulombfeld beeinflussen kann. Nach LANDAU (65) wächst der theoretische Wirkungsquerschnitt des Prozesses trotzdem exponentiell mit der Geschwindigkeit des stoßenden Teilchens an. Man kann sich das plausibel machen an dem Bild eines klassischen, elektrisch geladenen harmonischen Oszillators, der durch das Coulombfeld einer (im wesentlichen) gleichförmig vorbeibewegten Punktladung in Schwingungen versetzt wird. Die Amplitude, mit der er angeregt wird, muß proportional sein zu der Amplitude, mit der die elektrische Welle derjenigen Frequenz, die gleich seiner Eigenfrequenz ist, in einer Fourieranalyse der zeitlichen Änderung der Feldstärke am Orte des Oszillators vorkommt. Nun kann man leicht zeigen, daß die Fourieramplituden derjenigen Frequenzen, die wesentlich größer sind als die reziproke Stoßdauer (d. h. als die Geschwindigkeit des stoßenden Teilchens, dividiert durch eine Länge von der Größenordnung des Minimalabstandes seiner Bahn vom Ort des Oszillators), im COULOMBschen Kraftfeld einer gleichförmig bewegten Ladung auf einen festen Punkt exponentiell mit wachsender Frequenz abnehmen; dies rührt anschaulich davon her, daß man zur Darstellung dieses Kraftverlaufs durch Superposition harmonischer Schwingungen praktisch keine Schwingungen mehr nötig hat, deren Perioden kürzer sind als die kürzeste Zeit, innerhalb deren sich die Kraft um ihre eigene Größenordnung ändern kann, d. h. eben als die Stoßdauer. Man wird also in der Tat eine zunächst exponentiell anwachsende Kernanregung mit abnehmender Stoßdauer, d. h. abnehmendem Minimalabstand vom Kern und wachsender Geschwindigkeit des Teilchens erwarten. Die Erfahrung stimmt mit diesem theoretischen Verlauf nicht schlecht überein. Auch daß empirisch der Wirkungsquerschnitt die Größenordnung des geometrischen Kernquerschnitts erst für Energien erreicht, die das α-Teilchen befähigen, unter Überwindung der Potentialschwelle in den Kern einzudringen, ist theoretisch plausibel. —

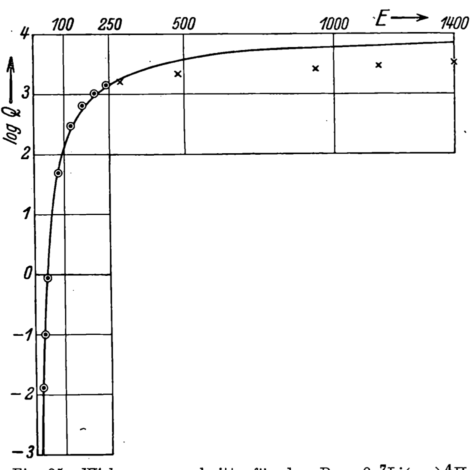


Fig. 25. Wirkungsquerschnitte für den Prozeß $^{7}_{3}\mathrm{Li}(p,\alpha)^{4}_{2}\mathrm{He}$ (Punkte experimentell, Kurve theoretisch; Energieeinheit Kilovolt).

Auch die theoretischen Formeln für die Umwandlungswahrscheinlichkeiten lassen sich nur an den leichten Kernen quantitativ prüfen. Am besten untersucht ist der Prozeß $^7_3\mathrm{Li}\,(\mathrm{p}, \alpha)\,^4_2\mathrm{He}$. Fig. 25 zeigt eine Zusammenstellung experimenteller Daten über seinen Wirkungsquerschnitt im Gebiet von $3 \cdot 10^4$ bis $1{,}4 \cdot 10^6$ eV. Primärenergie. Die theoretische Vergleichskurve ist aus einem geeignet gewählten Potential von J. STEWART[1]) berechnet. Die genauesten Rechnungen haben OSTROFSKY, BREIT und JOHNSON (16) angestellt; es ergibt sich als wahrscheinlichste Form des idealisierten Potentials des Li-Kerns gegen Protonen ein Kernradius von $3{,}47 \cdot 10^{-13}$ cm und ein Potential im Kerninnern von $V_0 = 35 \cdot 10^6$ eV. Eine Schwierigkeit, die speziell bei dieser Reaktion auftritt, ist übrigens, daß sich bei ihr die Umwandlungswahrscheinlichkeit durch ein eingedrungenes Teilchen w_l im Gegensatz zu den in § 24 allgemeinen Erfahrungen nur zu etwa $1\,^0\!/_0$ ergibt. Vgl. dazu den Schluß dieses Paragraphen.

Resonanzeindringung wurde bei zahlreichen Prozessen gefunden; Fig. 26 gibt als Beispiel den Wirkungsquerschnitt der Reaktion, die zur Entdeckung des Neutrons geführt hat. Die Breite der Resonanz steht zu ihrer Ausbeute in einem theoretisch befriedigenden Verhältnis. Eine systematische Verfolgung der Resonanzen durch das periodische System könnte einige Auskunft über die angeregten Zustände der Kerne liefern (§ 33); jedoch ist das empirische Material noch nicht sehr vollständig.

Eine beträchtliche Abweichung vom exponentiellen Verlauf zeigt die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von der Energie für die Prozesse (d, p). Ein Beispiel bietet Fig. 27. Wählt man die Konstanten des theoretischen Verlaufs so, daß der Wirkungsquerschnitt für die höchste beobachtete Energie mit der Erfahrung übereinstimmt, so erhält man für alle niedrigeren Energien wesentlich zu große Wirkungsquerschnitte.

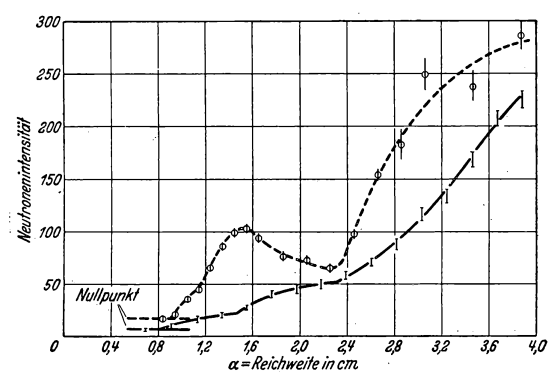


Fig. 26. Neutronenausbeute bei $^9_4\mathrm{Be}\,(\alpha, \mathrm{n})\,^{12}_6\mathrm{C}$. Ausgezogene Kurve: Ausbeute in dicker Schicht. Gestrichelte Kurve: Differentielle Ausbeute = Wirkungsquerschnitt. (Nach 34.)

[1]) Unveröffentlicht. Ich danke Herrn STEWART für die freundliche Überlassung seiner Ergebnisse.

Oppenheimer und Phillips (76) haben hierfür folgende Erklärung vorgeschlagen: Das Deuteron hat wegen seiner geringen Bindungsenergie einen großen Radius (vgl. Tabelle 5, § 15) und eine große Polarisierbarkeit. Es darf daher schon bei relativ großen Kernabständen nicht mehr als Massenpunkt betrachtet werden. Wenn sich sein Schwerpunkt im Abstand r vom Kern befindet, wird vielmehr von seinen beiden Bausteinen das Proton infolge der Coulombschen Abstoßung im allgemeinen einen größeren und folglich das Neutron einen kleineren Kernabstand als r haben. Es wird daher, zumal bei leichten Kernen, häufig vorkommen, daß das Neutron das Kerninnere erreicht, ohne daß die Ladung des Protons tief in die Potentialschwelle eingedrungen wäre, und es ist dann sehr wahrscheinlich, daß das Neutron eingefangen wird und das Proton mit der Überschußenergie die Kernnähe wieder verläßt. Der Prozeß nimmt also infolge der geringen Bindung des Neutrons an das Proton gewissermaßen eine Mittelstellung zwischen der Umwandlung durch geladene Teilchen und der durch freie Neutronen ein. In Fig. 28 sind von Oppenheimer und Phillips berechnete theoretische Kurven für verschiedene angenommene Werte des Massendefekts des Deuterons eingetragen. Ob man die Übereinstimmung zwischen derartigen Rechnungen und den experimentellen Kurven schon zu einer quantitativen Massendefektsbestimmung für das Deuteron verwenden darf, bleibt freilich zweifelhaft. —

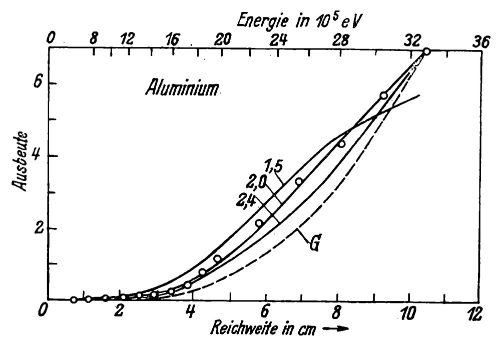


Fig. 27. Wirkungsquerschnitt für $^{27}_{13}\mathrm{Al}$ (d, p) $^{28}_{13}\mathrm{Al}$. Kreise experimentell (nach Lawrence und Mitarbeitern). Gestrichelte Kurve nach der Gamowschen Theorie (Einkörpermodell für das Deuteron). Ausgezogene Kurven nach der Theorie von Oppenheimer und Phillips für verschiedene Werte des Deuteron-Massendefekts (in M.e.V. angegeben).

Schließlich seien noch ein paar Bemerkungen über die Umwandlungswahrscheinlichkeit nach geschehenem Eindringen (w_l) gemacht. Daß ihre im allgemeinen mit eins vergleichbare Größe im Sinne des Mehrkörpermodells auch auf die Eindringwahrscheinlichkeiten stark zurückwirken muß, ist klar; z. B. ist ja die obige Erklärung der großen Wirkungsquerschnitte für den Prozeß (d, p) eben durch die Anwendung der Mehrkörpervorstellung auf das stoßende Teilchen entstanden. Daß die Rechnungen nach dem Einkörpermodell sich hier im ganzen besser bewähren als

bei den durch Neutronen ausgelösten Reaktionen, ist analog zu den Verhältnissen beim α-Zerfall dadurch verständlich, daß der aus der Gültigkeit des Coulombgesetzes im Außenraum folgende Exponentialfaktor alle anderen Einflüsse auf den Wirkungsquerschnitt weit überwiegt.

Zu der Frage, wie die anomal kleinen Werte von w_l zu erklären seien, die man beim Prozeß ${}^7_3\mathrm{Li}\,(\mathrm{p}, \alpha)\,{}^4_2\mathrm{He}$ beobachtet, ist eine Bemerkung von GOLDHABER (45) zu erwähnen. ${}^7_3\mathrm{Li}$ hat den Drehimpuls $^3/_2$. Bei dem Prozeß entstehen zwei α-Teilchen, die nach der BOSE-Statistik nur geradzahlige Drehimpulse relativ zueinander haben dürfen. Das ankommende Proton muß also wegen des Erhaltungssatzes für den Drehimpuls den Wert $^3/_2$ entweder durch ein eigenes Moment $-\,^3/_2$ zu null oder durch ein Moment $+\,^1/_2$ zu zwei ergänzen. Letzteres erscheint wahrscheinlicher, weil das Proton sonst außer seinem Spin noch ein Bahnmoment $l = 1$ haben müßte. Wenn es nun erlaubt ist, anzunehmen, daß der Spin desjenigen Protons, das außer einem α-Teilchen und zwei Neutronen im ${}^7_3\mathrm{Li}$-Kern schon vorhanden sein muß, parallel zum Gesamtmoment des Kerns orientiert sei (andernfalls müßte man unangenehm große Bahnmomente der Teilchen im Li-Kern zulassen), so folgt, daß der Spin des ankommenden Protons parallel zu dem des Protons im ${}^7_3\mathrm{Li}$ sein muß, wenn der Prozeß möglich sein soll. Andererseits müssen diese beiden Spins in dem entstehenden α-Teilchen antiparallel sein. Die Entstehung des α-Teilchens erfordert also eine Spinumklappung. Wenn die Kräfte, die von der Spinrichtung des Protons abhängen und daher zu einer solchen Umklappung führen können, ebenso wie in der Atomhülle sehr klein sind gegen die Kräfte, die auf seine Ortskoordinaten wirken, so ließe sich dadurch die geringe Wahrscheinlichkeit des Prozesses erklären. Eine quantitative Abschätzung ist nicht möglich, da die Spinkräfte nicht bekannt sind; jedoch sprechen andere Argumente (Streuung von Neutronen an Protonen, § 29; Theorie der Austauschkraft, § 41) eher für große Spinkräfte. Immerhin ist die Abweichung der Wirkungsquerschnitte von der üblichen Größenordnung eine auffallende Erscheinung, die einen Erklärungsversuch in der hier angedeuteten Richtung herausfordert. BOHR hat freilich neuerdings darauf hingewiesen, daß umgekehrt auch dann eine Erniedrigung des Wirkungsquerschnitts eintreten kann, wenn der angeregte Zwischenzustand des ${}^8_4\mathrm{Be}$, der analog zu den Neutroneneinfangungen (§ 25) bei dem Prozeß für kurze Zeit entsteht, infolge sehr großer Übergangswahrscheinlichkeit in den Endzustand zweier freier α-Teilchen zu stark gedämpft ist.

4. Strahlungsvorgänge

§ 32. Spontane Emission und innerer Photoeffekt von γ-Strahlung

Elektromagnetische Strahlung tritt bei Kernreaktionen auf, wenn ein Kern nach einer spontanen oder erzwungenen Umwandlung in einem angeregten Zustand zurückgeblieben ist. Wir diskutieren zunächst den Mechanismus ihrer Emission, dessen Kenntnis sowohl für Rückschlüsse auf die Eigenschaften der stationären Zustände (§ 33) wie für das Verständnis der Einfangwahrscheinlichkeiten nach dem Mehrkörpermodell (§ 28—29) wichtig ist.

Ein angeregter Kern, der nicht oder nur mit sehr langer Lebensdauer radioaktiv zerfällt, kann seine Anregungsenergie auf zwei verschiedenen Wegen abgeben. Die Wechselwirkung der elektrischen Ladungen im Kern mit dem elektromagnetischen Feld kann zur direkten Emission von γ-Strahlung führen. Die Energie kann aber auch unter Vermittlung des elektromagnetischen Feldes an ein Elektron der Hülle des angeregten Kerns abgegeben werden. Die dabei frei werdenden Elektronen (die „sekundären β-Strahlen"), deren diskrete kinetische Energie gleich ist der Differenz zwischen der Anregungsenergie des Kerns und der zur Entfernung des Elektrons aus dem Atomverband notwendigen Ionisierungsenergie, liefern die genaueste Auskunft über die im Kern möglichen Energiesprünge. Aus den Intensitäten der γ- und sekundären β-Strahlen lassen sich, wie wir sehen werden, Schlüsse auf die Häufigkeit der Anregung des Ausgangszustandes, die Übergangswahrscheinlichkeit und die Drehimpulsänderung des Kerns beim Übergang ziehen.

Befände sich ein Kern in einem angeregten Zustand, von dem aus er nur auf einem einzigen Wege in den Grundzustand übergehen könnte, so würde die Intensität der γ-Strahlung, die wir beobachten, von der Lebensdauer des angeregten Zustandes unabhängig sein, sofern diese nur unmeßbar klein bliebe; wir haben kein Mittel, direkt festzustellen, ob der Übergang 10^{-20} oder 10^{-10} sec nach der Anregung des Kerns stattgefunden hat. Aussagen über die Übergangswahrscheinlichkeiten erhalten wir erst, wenn verschiedene mögliche Übergänge miteinander konkurrieren; das Verhältnis der Häufigkeiten zweier Arten des Überganges aus einem vorgegebenen Zustand ist gleich dem Verhältnis der Übergangswahrscheinlichkeiten. Absolutwerte der Übergangswahrscheinlichkeiten kann man auf

diesem Wege nur erhalten, wenn man für die Wahrscheinlichkeit eines der konkurrierenden Prozesse eine direkte Abschätzung hat, welche vorläufig nur aus der Theorie zu gewinnen ist. Ein Vergleich zwischen Theorie und Erfahrung ist daher heute nur für das Verhältnis der Übergangswahrscheinlichkeiten möglich.

Um einen Ansatz für die Berechnung der γ-Emissionswahrscheinlichkeit zu gewinnen, erscheint es zunächst am einfachsten anzunehmen, ein einziges geladenes Teilchen im Kern sei Träger der gesamten Anregungsenergie. Man wird es versuchsweise so wie das „Leuchtelektron" in der Theorie der Atomhülle als schwingenden Dipol vom Moment $\mathfrak{p}$ auffassen, dessen Energieausstrahlung pro Zeiteinheit durch die klassische Formel

$$S = \frac{2}{3c^3}\,|\ddot{\mathfrak{p}}|^2 \tag{32.1}$$

gegeben ist. Schwingt der Dipol mit der Amplitude ex und der Frequenz ν:

$$\mathfrak{p} = (p, 0, 0)\,;\; p = e\,(x e^{2\pi i \nu t} + x^* e^{-2\pi i \nu t})\,, \tag{32.2}$$

so erhält man im Zeitmittel

$$S = \frac{4e^2}{3c^3}\,(2\pi\nu)^4\,|x|^2. \tag{32.3}$$

In quantentheoretischer Übersetzung ist S die mittlere ausgestrahlte Energie; also S, dividiert durch die pro Übergang emittierte Energie $h\nu$, die Übergangswahrscheinlichkeit; für x muß man dabei das Matrixelement x_{mn} einsetzen, das dem betrachteten Übergang zugeordnet ist. Die Übergangswahrscheinlichkeit ist demnach

$$W = \frac{4e^2}{3\hbar}\left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^3 |x_{nm}|^2\,. \tag{32.4}$$

Das Matrixelement x_{nm} kann man in einem zusammengesetzten Kern nicht mehr berechnen. Man kann es aber abschätzen nach der aus der Vertauschungsrelation zwischen x und p_x folgenden Summenrelation

$$\tfrac{1}{2}\hbar = \sum_m M\,x_{nm}\,\dot{x}_{mn} = \sum_m M x_{nm}^2 \cdot 2\pi\nu_{nm}\,. \tag{32.5}$$

Hieraus folgt eine obere Grenze für x_{nm}, die, wenn nur verhältnismäßig wenige Übergänge möglich sind, auch ungefähr erreicht werden wird:

$$|x_{nm}|^2 \approx \frac{\hbar}{4\pi M\nu}\,. \tag{32.6}$$

Diese Abschätzung leistet von vornherein einen Verzicht auf die Ermittlung von Unterschieden zwischen den Übergangswahrscheinlichkeiten konkurrierender Übergänge. Dies ist unvermeidlich, da schon die Verwendung des Einkörpermodells einen wesentlich größeren Fehler bedingt als der

Übergang von (32.5) zu (32.6). Zum Beispiel könnte ein nur aus α-Teilchen aufgebauter Kern entgegen unserer Voraussetzung überhaupt kein Dipolmoment haben, da für ihn — weil das Verhältnis der Ladung zur Masse dann für alle Kernbausteine dasselbe ist — Ladungs- und Massenschwerpunkt stets zusammenfallen (BOHR, vgl. 24).

TAYLOR und MOTT (89) haben darauf hingewiesen, daß die Intensität der Dipolstrahlung durch das Verschwinden des Dipolmoments nicht zu Null gemacht, sondern nur um den Faktor (Kernradius/Wellenlänge)^2 herabgesetzt wird; klassisch ausgedrückt kann stets ein beträchtlicher Bruchteil der Strahlung eines innerlich bewegten geladenen Systems, dessen Dimensionen mit der Wellenlänge vergleichbar sind und dessen einzelne Teile daher Kugelwellen aussenden, die nicht mehr notwendig untereinander in Phase sind, als Strahlung eines Dipols sehr kleiner Lineardimensionen dargestellt werden. Immerhin kommt die Dipolstrahlung dabei in dieselbe Größenordnung der Intensität wie der Teil der Strahlung, der als hervorgerufen von einem Quadrupol aufgefaßt werden kann. Deren Übergangswahrscheinlichkeit hängt ab vom Matrixelement des Quadrats der Elongation x nach der Formel

$$W = \frac{3\,e^2}{20\,\hbar}\left(\frac{2\,\pi\nu}{c}\right)^5 \left|(x^2)_{mn}\right|^2 . \tag{32.7}$$

Ein erster Vergleich dieser theoretischen Formeln mit der Erfahrung ist möglich am Problem der α-Teilchen übernormaler Reichweite von RaC′ (vgl. 71, über die Erscheinung § 33). Aus der Energie der aus dem Grundzustand dieses Kerns emittierten „normalen α-Teilchen“ und der zu etwa 10^{-5} sec geschätzten Lebensdauer des Kerns folgt nach (20.23) ein Kernradius von etwa $0{,}84 \cdot 10^{-12}$ cm. Setzt man diesen Wert und die Energie der um $6{,}09 \cdot 10^5$ Volt energiereicheren Gruppe überschneller α-Teilchen wieder in (20.23) ein, so erhält man für die Lebensdauer des angeregten Zustandes, dem diese schnelleren α-Teilchen entstammen, etwa 10^{-7} sec. Wenn der Kern aus dem angeregten Zustand nicht durch Emission in den Grundzustand übergehen könnte, würde er also in der Zeit $\approx 10^{-7}$ sec unter α-Emission zerfallen. In Wirklichkeit wird das Intensitätsverhältnis der γ- und α-Emission durch das Verhältnis der Übergangswahrscheinlichkeiten, d. h. durch $W/10^7$ gegeben sein. Für die γ-Strahlen der genannten Energie folgt aus (32.6) $|x_{mn}| \approx 6 \cdot 10^{-13}$ cm. Dieser Wert liefert für die Größenordnung der Lebensdauer bei einem Dipolübergang nach (32.4) 10^{-15} sec bei einem Quadrupolübergang nach (32.7) — und folglich auch bei einem durch das Verschwinden des Dipolmoments geschwächten Dipolübergang — 10^{-11} sec. Es sollten also nach (32.4) etwa 10^8, nach

(32.7) etwa 10^4 γ-Quanten auf ein α-Teilchen aus dem angeregten Zustand emittiert werden. Nun sind direkte Intensitätsvergleiche nicht möglich; es ist aber klar, daß nicht mehr als ein Quant der diesem Übergang entsprechenden γ-Strahlung pro Zerfallsprozeß emittiert werden kann (denn der einmal im tieferen Zustand befindliche Kern wird nicht wieder angeregt), und daher dürfte jedenfalls auf 10^8 bzw. 10^4 Zerfallsprozesse nicht mehr als ein α-Teilchen dieser bestimmten übernormalen Energie kommen. Beobachtet ist ein derartiges α-Teilchen auf $2 \cdot 10^6$ Zerfallsprozesse. Dabei ist zu beachten, daß einerseits die Zahl der γ-Prozesse pro Zerfall, d. h. die Anregungsstärke des oberen Zustandes, nicht bekannt ist, und daß andererseits eine Änderung von r_0 um $\pm 10\%$ genügen würde, um eine Änderung der α-Lebensdauer um den Faktor $10^{\pm 2}$ zu bewirken; man wird daher mit der rohen Übereinstimmung der Größenordnungen zufrieden sein müssen.

Einen zweiten, genaueren Vergleich kann man mit der Wahrscheinlichkeit der Emission sekundärer β-Strahlen durchführen. Man kann diese bestimmen, indem man die Wahrscheinlichkeit eines Photoeffekts der aus (32.4) bzw. (32.7) folgenden γ-Strahlung in der eigenen Atomhülle ausrechnet (Hulme, 56, Taylor und Mott, l. c.). Bei dieser Art der Rechnung, die in der Emission sekundärer β-Strahlen einen normalen Photoeffekt sieht, ist allerdings vorausgesetzt, daß die Übergangswahrscheinlichkeit des Kerns durch die Möglichkeit dieser Umsetzung seiner Anregungsenergie in kinetische Energie eines Hüllenelektrons nicht wesentlich beeinflußt wird. Diese Annahme ist jedenfalls dann gerechtfertigt, wenn die Zahl der ausgelösten sekundären β-Teilchen wesentlich kleiner ist als die Zahl der γ-Quanten; eine Ausnahme von dieser Voraussetzung behandeln wir am Schluß.

Die Rechnung, deren Verlauf wir hier nicht andeuten wollen, ergibt naturgemäß die absoluten Übergangswahrscheinlichkeiten mit der durch die Ungewißheit der Matrixelemente der strahlenden Teilchen im Kern erzwungenen Ungenauigkeit; da aber diese Ungenauigkeit in die β- und γ-Emissionswahrscheinlichkeiten in gleicher Weise eingeht, ist deren Verhältnis, der sogenannte „Koeffizient der inneren Umwandlung" α genau bestimmt. Einen Vergleich zwischen Theorie und Experiment zeigt Fig. 28. Dabei ist zu beachten, daß nach der Quantenmechanik ein bestimmter Übergang im Kern nicht zugleich Dipol- und Quadrupolstrahlung aussenden kann. Man kann nämlich zeigen, daß jede von einem Punkt ausgehende Kugelwelle, die den Maxwellschen Gleichungen genügt, zerlegt werden kann in eine Überlagerung verschiedener Kugelwellen, die von

einem Dipol, Quadrupol, Oktopol ... herrühren; diese Zerlegung ist genau analog zu der Zerlegung der Materiewellen (§ 27) und kann interpretiert werden als Zerlegung in Komponenten mit verschiedenen Drehimpulsen. Da nun im Kern Anfangs- und Endzustand je einen bestimmten Drehimpuls haben, wird man erwarten, daß zu einem wohldefinierten Übergang auch eine wohldefinierte Sorte von emittierter Strahlung gehört. In der Tat läßt sich zeigen, daß ein Übergang, bei dem l sich um 1 ändert, Dipolstrahlung emittiert, während $\Delta l = 0$ oder 2 zu Quadrupolstrahlung führt. Übergänge bei denen das Bahnmoment erhalten bleibt, aber ein Spin umklappt, emittieren Strahlung, die einem magnetischen Dipol entspricht. Grundsätzlich unfähig zur Emission elektromagnetischer Strahlung sind Übergänge von $l = 0$ nach $l = 0$.

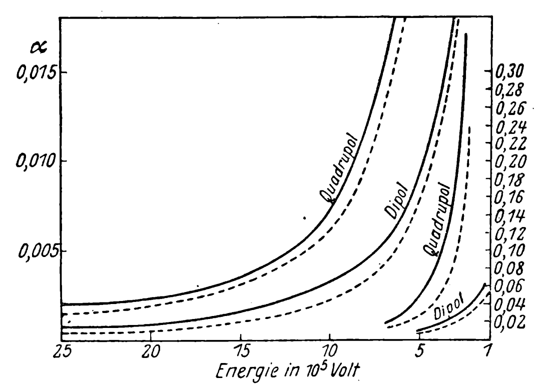


Fig. 28. Koeffizient der inneren Umwandlung (aus K. PHILIPP, Kernspektren, 1937). Ausgezogene Kurven experimentell, gestrichelte theoretisch. Die Ordinatenskala rechts bezieht sich auf die in kleinerem Maßstab gezeichneten Kurventeile.

Fig. 28 zeigt, daß die experimentellen Werte des Koeffizienten α tatsächlich auf zwei getrennten Kurven liegen, die den theoretischen Kurven für Dipol- bzw. Quadrupolübergänge benachbart sind. Wenn man annehmen darf, daß die Abweichung durch eine Verfeinerung der Theorie (TAYLOR (90) hat die Berücksichtigung der Strahlung magnetischer Dipole vorgeschlagen) behoben werden wird, so kann man nunmehr direkt aus der Größe des inneren Umwandlungskoeffizienten eines Übergangs auf die mit ihm verbundene Drehimpulsänderung im Kern schließen. Nicht eingetragen ist eine sekundäre β-Linie des Übergangs RaCC' der Energie $1{,}426 \cdot 10^6$ Volt, zu der überhaupt keine γ-Strahlung gefunden wurde, deren α also den Wert ∞ zu haben scheint. Nach einem Vorschlag von FOWLER (36) könnte dieser Übergang zwischen zwei Niveaus mit $l = 0$ stattfinden und daher für γ-Strahlung überhaupt verboten sein. Die β-Emission wäre in diesem Fall kein normaler Photoeffekt, sie käme vielmehr dadurch zustande, daß der Zustand des Kerns durch die Anwesenheit der Hüllenelektronen in Kernnähe eine Störung erfährt.

§ 33. Die angeregten Zustände der Kerne

Wegen der großen Energiestufen im Kern ist es nicht leicht, angeregte Kerne zu erhalten. Die einzige Quelle unserer Kenntnis über die angeregten Zustände der Kerne sind daher spontane und künstliche Umwandlungsprozesse, nach denen häufig ein angeregter Kern zurückbleibt, auf dessen Energie aus den Energien der emittierten materiellen Teilchen oder γ-Strahlen geschlossen werden kann.

Die direkteste Auskunft über die Lage der Niveaus liefern Unterschiede zwischen den kinetischen Energien materieller Teilchen, die bei einer und derselben Reaktion emittiert werden. So hat man beobachtet, daß einem bestimmten α-Zerfall oft mehrere diskrete Energiegruppen der α-Teilchen zugeordnet sind. Die Gesamtzahl der α-Teilchen aller Gruppen ist dabei gleich der Zahl der zerfallenden Kerne; jeder Kern hat also gewissermaßen die Wahl, seinem α-Teilchen eine dieser verschiedenen Energien mitzugeben. Dies kann entweder dadurch geschehen, daß der radioaktive Kern gelegentlich das α-Teilchen aus einem angeregten Zustand heraus emittiert und ihm dadurch die Anregungsenergie als Überschuß über seine normale Zerfallsenergie mitgibt, oder dadurch, daß der entstehende Kern in einem angeregten Zustand zurückbleibt und dadurch dem α-Teilchen die zu dieser Anregung notwendige Energie entzieht; zur Annahme eines Zusammenwirkens beider Ursachen ist man bisher nicht gezwungen worden. Nach den bisher entwickelten Vorstellungen muß man die „α-Strahlen übernormaler Reichweite", die von den sehr kurzlebigen Kernen des RaC′ und ThC′ emittiert werden, und deren Energie bis zu 2,9 Millionen Volt über den Normalenergien liegen, durch den ersten Mechanismus erklären, die „Feinstruktur" der α-Strahlung mehrerer anderer, längerlebender Kerne, die nur Energiedifferenzen bis zu 0,5 Millionen Volt aufweist, dagegen durch den zweiten. Nach der GEIGER-NUTTALL-Beziehung muß nämlich die Emissionswahrscheinlichkeit mit der Energie stark zunehmen; man kann die außerordentlich geringe Häufigkeit der überschnellen α-Strahlen (ca. 10^{-5} pro zerfallenden Kern) daher nur durch die Annahme erklären, daß sie nicht von demselben Zustand emittiert werden wie die normalen Teilchen, sondern von einem Zustand, der a priori sehr viel seltener als dieser zur Emission befähigt ist. Es ist dabei zunächst gleichgültig, ob das daran liegt, daß bei dem vorangegangenen Zerfallsprozeß der betrachtete Kern sehr selten in diesem Zustand entsteht, oder daran, daß der Zustand meist durch einen γ-Übergang wieder verschwindet, ehe er Gelegenheit zum α-Zerfall gehabt hat, so wie es nach § 32 wahrscheinlich

ist. Eine Folge dieser Annahme ist, daß die überschnellen α-Teilchen nur im ersten Moment der Lebensdauer des sie emittierenden Kerns auftreten (nämlich ehe die angeregt entstandenen Kerne sämtlich in den Grundzustand übergegangen sind); da diese Lebensdauern aber selbst unbeobachtbar klein sind, läßt sich dieses Verhalten nicht experimentell nachweisen. Dagegen bietet die Umkehrung dieses selben Arguments den Grund für die Zuweisung der α-Feinstrukturen an den zweiten Mechanismus, da sich bei ihnen die Relativintensitäten der einzelnen Linien während der minuten- oder selbst jahrelangen Lebensdauer des Elements nicht ändern.

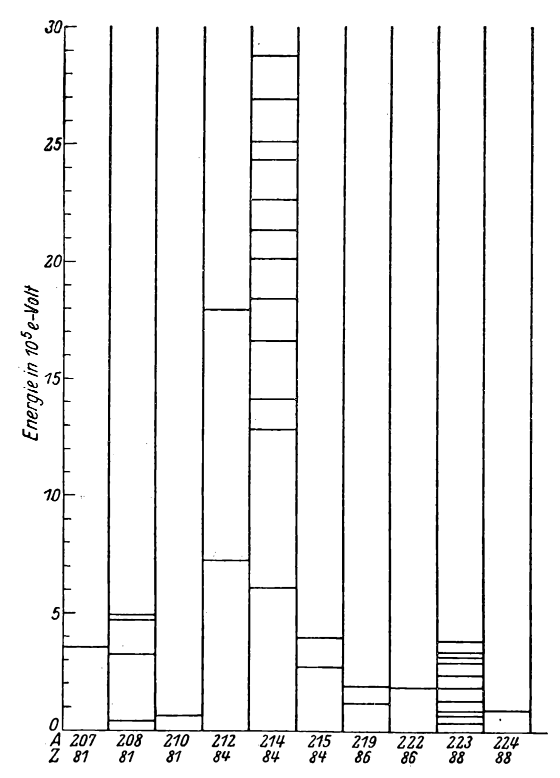


Fig. 29. Termschemata natürlich radioaktiver Kerne (nach K. PHILIPP, Kernspektren).

Die aus diesen beiden Phänomenen folgenden Anregungsenergien verschiedener Kerne sind in Fig. 29 dargestellt. Eine Bestätigung und reichhaltige Ergänzung dieser Schlüsse wäre nun geliefert, wenn den Energiedifferenzen, welche in diesen Termschematen möglich sind, die Frequenzen der von den betreffenden Elementen emittierten γ-Linien zugeordnet werden könnten. Dies ist nur in einigen Fällen gelungen; das bestbekannte Beispiel zeigt Fig. 30. Neben den Energien der α- und γ-Strahlen müssen auch ihre Intensitäten verglichen werden. Denn die Intensität einer α-Gruppe gibt die Häufigkeit an, mit welcher der ihr zugeordnete Zustand des Endkerns angeregt wird; daher muß die Häufigkeit aller von diesem Zustand ausgehenden γ-Übergänge gleich dieser Häufigkeit sein, bei tieferen Zuständen noch vermehrt um die Häufigkeit

derjenigen γ-Übergänge von höheren Niveaus aus, welche in den betrachteten Zustand münden. Nun sind die γ-Intensitäten in dem hier betrachteten Fall nicht direkt bekannt; aber aus den beobachteten Intensitäten der sekundären β-Strahlen und dem Zusammenhang zwischen β- und γ-Intensität nach Fig. 28, der jeweils nur zwei Möglichkeiten zur Wahl läßt, kann wenigstens gezeigt werden, daß nirgends ein Widerspruch auftritt (vgl. MOTT, 71).

Die Übereinstimmung in diesem Fall zeigt, daß die verwendeten Vorstellungen im Prinzip korrekt sind. Jedoch deuten die teils erfolglosen, teils in ihren Ergebnissen sehr schwankenden und daher kaum als definitiv anzusehenden Versuche, einer Zuordnung bei anderen Kernen (z. B. zwischen der großen Zahl von Niveaus des RaC′ und den noch zahlreicheren von diesem Kern emittierten γ-Linien) darauf hin, daß oft direkte Übergänge zwischen den von den α-Strahlen her bekannten Niveaus nicht auftreten, während umgekehrt Niveaus vorhanden sein müssen, die bei der α-Strahlung nicht in Erscheinung treten. Das kann daran liegen, daß sowohl für den Zerfallsprozeß, durch den die Anregung zustande kommt, wie für die γ-Übergänge gewisse Auswahlregeln gelten. Sie werden vor allem die Drehimpulsänderung betreffen. So geht in die theoretische Formel für die α-Zerfallswahrscheinlichkeit (20.22) der vom α-Teilchen mitgenommene Drehimpuls l ein; Übergänge mit $l = 0$ (d. h. für den Kern mit der Drehimpulsänderung $\Delta l = 0$) erweisen sich als begünstigt. Ein ähnliches Verhalten ist nach dem vierten Kapitel für den β-Zerfall zu erwarten. Würde für jeden Zerfallsprozeß streng $\Delta l = 0$ und für jeden γ-Übergang, wie für Strahlungsübergänge in der Atomhülle, $\Delta l = \pm 1$ gelten, so hätten alle angeregten Kerne, die durch den Zerfall eines im Grundzustand befindlichen Ausgangskerns entstehen, denselben Drehimpuls, und es wäre daher überhaupt kein direkter γ-Übergang zwischen ihnen möglich. Tatsächlich genügt die Tatsache, daß zu den Dipolübergängen mit $\Delta l = 1$ die Quadrupolübergänge mit $\Delta l = 0$ oder 2 kommen, um diese Regel als weniger streng erscheinen zu lassen; immerhin muß bei einer Diskussion der angeregten Zustände stets auf den Einfluß von Auswahlregeln geachtet

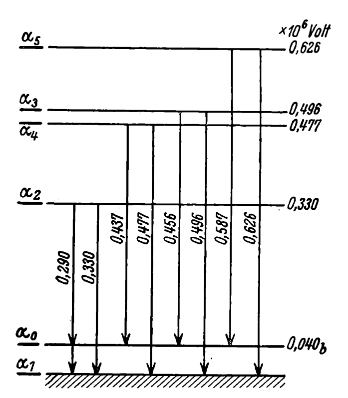


Fig. 30. Termschema von ThC″ (nach GAMOW). α-Niveaus aus der Feinstruktur des vorausgegangenen Zerfalls; gefundene γ-Linien sind ausgezogen.

werden. Man kann versuchen, aus den Häufigkeiten der Anregung beim Zerfall und des inneren Photoeffekts so viele Schlüsse auf die Drehimpulsänderungen der Kerne bei Zerfall und γ-Emission zu ziehen, daß es, von einem bekannten oder wahrscheinlichen Drehimpulswert ausgehend (z. B. $l = 0$ für den Grundzustand eines Kerns mit geradem N und Z), möglich ist, den bekannten angeregten Zuständen eines Kerns oder einer Reihe aufeinanderfolgender Kerne bestimmte Drehimpulsquantenzahlen zuzuschreiben (GAMOW, 44). Ob die vorhandenen Theorien des α- und β-Zerfalls hierzu schon eine quantitative Grundlage bieten können, ist freilich zweifelhaft.

Über die angeregten Zustände der leichteren Kerne geben die Zertrümmerungsprozesse einigen Aufschluß. In manchen Fällen treten bei homogener Energie der Geschosse verschiedene diskrete Energiewerte der Trümmer auf; man kann die Differenzen zwischen diesen Werten als Kernanregungsenergien deuten. Teilweise ist eine ihnen zugeordnete γ-Strahlung beobachtet. Außerdem liefern die Resonanzphänomene Aufschluß über die Lage sehr hoch angeregter Zustände des durch Zusammenfügung des beschossenen Kerns und des Geschosses entstehenden neuen Kerns. Jedoch sind diese Daten noch zu spärlich, um eine systematische Übersicht zu erlauben; auf ihre Wiedergabe ist daher hier verzichtet (vgl. 20, 15). Daher fehlt, über die qualitativen Betrachtungen von § 26 und 29 hinaus, für eine ins einzelne gehende Theorie der Lage der angeregten Kernzustände vorläufig wohl die notwendige empirische Basis.

§ 34. Umwandlungen unter Beteiligung von γ-Strahlung

Die γ-Strahlung tritt bei vielen Umwandlungen als Nebenerscheinung auf; außerdem gibt es aber Prozesse, die ohne ihre Beteiligung nicht ablaufen könnten. Es sind einerseits diejenigen Umwandlungen, bei denen das Geschoß im Kern steckenbleibt, ohne ein anderes Teilchen aus dem Kernverband zu lösen; hier ist die γ-Strahlung notwendig, um den Energiesatz zu erfüllen. Andererseits sind es die durch γ-Strahlung selbst ausgelösten Kernzerlegungen, die „Kern-Photoeffekte".

Die Einfangprozesse unter γ-Emission können sich nach § 26 in zwei Schritten vollziehen, wenn die Energie des stoßenden Teilchens mit einer Resonanzenergie übereinstimmt. Die Theorie dieses Vorgangs ist mit der heute erreichbaren Genauigkeit durch die Abschätzung der Einfangwahrscheinlichkeit in den quasistationären Zwischenzustand nach § 28—29 und der Übergangswahrscheinlichkeit von einem derartigen angeregten

Zustand in den Grundzustand nach § 32 gegeben. Trotzdem ist es vielleicht begründet, auch die Wahrscheinlichkeit für einen direkten Übergang aus dem Zustand des freien Teilchens in den Grundzustand nach dem Einkörpermodell abzuschätzen, da dieser Prozeß auch in Abwesenheit von quasistationären Resonanzniveaus vorkommen kann.

Wir betrachten zunächst die Einfangung von Neutronen. Für die Ladung e müssen wir in der Gleichung (32.3) nun den Wert $e' = Ze/(A+1)$ einsetzen, denn das Dipolmoment wird ja erzeugt durch die Ladung Ze des Kerns, deren Abstand vom Systemschwerpunkt aber nur das $1/(A+1)$-fache des Abstands Neutron—Kernschwerpunkt ist. Wir nehmen ferner an, daß das Neutron mit $l = 0$ in den Kern eindringt; der Übergang kann dann unter Dipolstrahlung nur in ein P-Niveau ($l = 1$) stattfinden; wir nehmen also an, ein solches Niveau sei im Kern vorhanden. Normiert man den Anfangszustand so, daß pro Zeiteinheit ein Neutron durch die Flächeneinheit tritt, so ist W in (32.4) direkt der Wirkungsquerschnitt des gesuchten Prozesses. Dabei ist x_{nm} (oder, da sich das Neutron in drei Dimensionen bewegen kann, genauer $\mathfrak{r}_{nm}$) nunmehr aus der Eigenfunktion des freien Neutrons einerseits, der des im Kern gebundenen Neutrons ψ_p andererseits zu berechnen. Nach (32.4) und den Formeln des § 28 erhält man

$$Q = \frac{4e'^2}{3\hbar}\left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^3 \frac{1}{v} \frac{1}{\cos^2 K r_0 + \frac{k^2}{K^2}\sin^2 K r_0} \sum_i \left| \int d\mathfrak{r}\, \psi_p^* \mathfrak{r}_i \frac{\sin K r}{K r} \right|^2. \tag{34.1}$$

Dabei bezeichnet der Index i die drei Koordinatenrichtungen. Die Abschätzung (32.6) für das Matrixelement ist unter der Voraussetzung durchgeführt, daß Anfangs- und Endzustand gebundene Zustände bedeuten und daher so normiert sind, daß sich das Neutron mit Sicherheit im Kern befindet. Hier haben wir daher noch mit dem Normierungsfaktor

$$4\pi \int_0^{r_0} \frac{\sin^2 K r}{K^2 r^2} r^2 dr = \frac{2\pi}{K^2} r_0 \left(1 - \frac{\sin 2 K r_0}{2 K r_0}\right) \tag{34.2}$$

zu multiplizieren. So erhalten wir für Q die Abschätzung

$$\left.\begin{aligned} Q &\approx \frac{4e'^2}{\hbar v}\left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^3 \frac{1}{\cos^2 K r_0 + \frac{k^2}{K^2}\sin^2 K r_0} \frac{\hbar r_0}{2 M \nu K^2} \\ &\approx 8\pi^2 \frac{e'^2}{\hbar c} \frac{\lambda r_0}{\lambda_\nu^2} \frac{1}{K^2 \cos^2 K r_0 + k^2 \sin^2 K r_0}. \end{aligned}\right\} \tag{34.3}$$

Hierbei ist λ_ν die Wellenlänge der emittierten γ-Strahlung

$$\lambda_\nu = \frac{c}{\nu} \approx \frac{c h}{8\,\text{M.e.V.}} \approx 1{,}5 \cdot 10^{-11}\,\text{cm}.$$

Ferner ist für die meisten Kerne $e'^2/\hbar c \approx 1/740$; wir setzen weiter $K \approx \pi/2r_0$ und erhalten

$$Q \approx \frac{\lambda r_0}{13500 \cos^2 \varepsilon}.$$

Q ist also wie die anderen Umwandlungsquerschnitte proportional zu $1/v$, aber etwa um den Faktor 10^4 kleiner. Man erkennt hieraus wieder, daß die sehr großen Wirkungsquerschnitte des Prozesses (n, γ) nur durch das Resonanzphänomen des Mehrkörpermodells erklärt werden können. Ein Vergleich der Formel mit der Erfahrung kann daher nur für den Prozeß versucht werden, der wirklich ein Einkörperproblem darstellt: die Vereinigung eines Neutrons mit einem Proton zum Deuteron. Der experimentelle Wirkungsquerschnitt von etwa $10^{-24}\,\mathrm{cm}^2$ für Neutronen thermischer Geschwindigkeit steht in befriedigender Übereinstimmung mit unserer Abschätzung. Jedoch ist gerade hier die Annahme, das Neutron gehe in einen p-Zustand über, sehr bedenklich, da ein p-Zustand des Deuterons nicht stabil sein dürfte. Einen Ausweg bietet die Annahme (90), es handle sich gar nicht um elektrische, sondern um magnetische Dipolstrahlung, die (vgl. S. 156) auftritt, wenn Proton und Neutron vor dem Stoß antiparallele Spins hatten und nun in den Grundzustand übergehen, in dem ihre Spins parallel stehen. Man muß dann das Matrixelement des elektrischen Dipolmoments in (34.1) durch das des magnetischen ersetzen. Nach der ausführlichen Diskussion von Bethe und Bacher (11a) kann man die Erfahrungen befriedigend darstellen mit Annahmen über die Spinabhängigkeit der Neutron-Proton-Kraft, die mit den zur Erklärung der Streuversuche (vgl. S. 135) gemachten in gutem Einklang stehen.

Für die Einfangung von Protonen ist $e' = \frac{Z-A}{A+1} e$ zu setzen. Ferner tritt an die Stelle der Größe $\cos \varepsilon$ nach (§ 30) die dort definierte Größe α_0; für sehr langsame Protonen wird also nach (30.36) und (34.3)

$$Q \approx 8\pi^2 \frac{e'^2}{\hbar c} \frac{1}{K^2} \frac{\lambda r_0}{\lambda_\gamma^2} \frac{1}{\cos \varepsilon} \frac{2\pi Z e^2/\hbar v}{e^{2\pi Z e^2/\hbar v} - 1}. \tag{34.4}$$

Mit wachsender Geschwindigkeit wird es wie in § 30 Resonanzstellen geben, an denen Q sehr viel größer wird. Fig. 31 zeigt den empirischen Wirkungsquerschnitt des Prozesses ${}^{12}_{6}\mathrm{C}\,(p, \gamma)\,{}^{13}_{7}\mathrm{N}$. Durch eine genauere Berechnung der Bewegung des Protons im Kraftfeld des C-Kerns nach der Art des § 30 haben Breit und Yost (101) gefunden, daß der

theoretische Wirkungsquerschnitt bei der Resonanzstelle wesentlich größer ist als der experimentelle; angesichts der Mängel des Einkörpermodells ist dieser Abweichung kaum großes Gewicht beizulegen. —

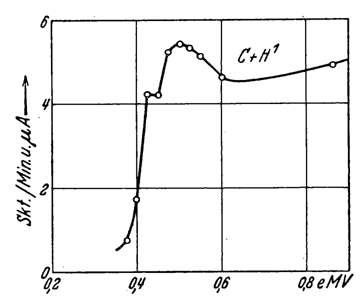


Fig. 31. Anregungskurve des Prozesses ${}^{12}_{6}C(p,\gamma){}^{13}_{7}N$ in dicker Schicht (nach TUVE und HAFSTAD, entnommen aus (34)).

Schließlich betrachten wir den Prozeß (γ, n). Er ist die Umkehrung des soeben behandelten; die Wirkungsquerschnitte unterscheiden sich also nur durch die spezifischen Phasenraumvolumina des Endzustandes und durch den von der Geschwindigkeit der einfallenden Teilchen herrührenden Normierungsfaktor. An Stelle von

$$\frac{1}{v}\,\frac{V\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2}{h^3 c} \quad \text{tritt hier} \quad \frac{1}{c}\,\frac{V(Mv)^2}{h^3 v}$$

(vgl. die Erläuterung des Phasenraumvolumens in § 39). Man erhält so für den Wirkungsquerschnitt

$$Q = 4\pi\,\frac{e'^2}{\hbar c}\,\frac{r_0 k}{K^2\cos^2 K r_0 + k^2 \sin^2 K r_0}\,, \tag{34.5}$$

entsprechend für ein Proton

$$Q = 4\pi\,\frac{e'^2}{\hbar c}\,\frac{r_0 k}{K^2}\,\alpha_0^2\,. \tag{34.6}$$

Die durch (34. 5) gelieferte Größenordnung stimmt mit dem bei ${}^{2}_{1}D(\gamma,n){}^{1}_{1}H$ gefundenen Wirkungsquerschnitt ($\sim 5\cdot 10^{-28}\,\mathrm{cm}^2$) wohl befriedigend überein. Eine genauere Diskussion geben BETHE und BACHER (11a).

5. Hinweis auf astrophysikalische Anwendungen

§ 35. Die Häufigkeitsverteilung der chemischen Elemente

Die einzigen Naturvorgänge, die heute auf der Erde eine Verwandlung der Elemente ineinander bewirken, sind, soweit wir wissen, die Radioaktivität und die Höhenstrahlung; beide haben eine so geringe Intensität, daß sie das Mischungsverhältnis der Elemente selbst in geologischen Zeitspannen ($\sim 10^9$ Jahre) nicht wesentlich ändern können. Man darf also annehmen, daß heute die Häufigkeitsverteilung der Elemente (Fig. 32)

dieselbe ist wie zur Zeit der Entstehung der festen Erdrinde. Chemische Analysen von Meteoriten und spektralanalytische Untersuchungen über die Zusammensetzung der Sternatmosphären (Fig. 33) deuten darauf hin, daß im großen und ganzen dieselbe Häufigkeitsverteilung in dem gesamten unseren Methoden zugänglichen Teil des Universums besteht. Man wird daher annehmen müssen, daß entweder schon der Vorgang, dem unser gesamtes Sternsystem seine Entstehung verdankt, oder eine nach seiner Entstehung überall unter gleichen Bedingungen wirkende Ursache diese Verteilung bestimmt hat. Die erste Annahme schiebt das Problem in ein heute jeder theoretischen Forschung entzogenes Gebiet zurück; die zweite Annahme gestattet

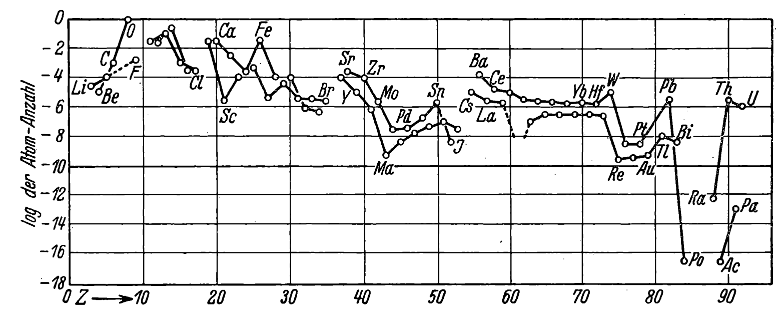


Fig. 32. Häufigkeit der chemischen Elemente in der Erdrinde (nach GOLDSCHMIDT, 46).

dagegen seine Verknüpfung mit den aktuellen Fragen über den inneren Aufbau der Sterne und läßt eine nähere Untersuchung lohnend erscheinen.

Das Innere der Sterne scheint nämlich heute die einzige Stelle zu sein, an der in großem Maß Energien verfügbar sind, die zur Erzeugung erzwungener Umwandlungen ausreichen. Nun ist die wesentliche Schwierigkeit aller bisherigen Theorien des Sterninnern die Unkenntnis der Energiequellen, die zur Aufrechterhaltung der hohen Sterntemperaturen während der durch eine Reihe von Erfahrungen geforderten Zeiträume (wenigstens $2 \cdot 10^9$ Jahre) notwendig sind. Es scheint sicher, daß außer Kernprozessen oder hypothetischen Vorgängen noch unbekannter Art keine hinreichend kräftigen Energiequellen zur Verfügung stehen. Es ist daher sehr wohl denkbar, daß die heutigen Kenntnisse über die Möglichkeiten und Wirkungsquerschnitte der Kernreaktionen hinreichen, um das Problem der Energieerzeugung im Sterninnern zu lösen. Die Häufigkeitsverteilung der Elemente müßte als Ergebnis der zur Energieerzeugung notwendigen Umwandlungen folgen, und ihr Vergleich mit der Erfahrung wäre eine wichtige Kontrolle der Theorie. Wir wollen hier die allgemeine astrophysikalische Frage der

Energieerzeugung nicht aufwerfen, sondern nur auf einige unmittelbar an der empirischen Verteilung der Elemente prüfbare Vorstellungen hinweisen.

Die Häufigkeitsverteilung zeigt, vor allem in der vollständigsten Liste, derjenigen aus der Erdrinde, sehr deutlich die Auszeichnung der geraden Teilchenzahlen (HARKINS, vgl. § 9). In den Figuren sind die Elemente mit geradem Z und die mit ungeradem Z jeweils für sich durch eine Linie verbunden; die Linie der geraden Elemente liegt fast durchweg über der der ungeraden. Am deutlichsten zeigt sich dieses Verhalten bei den seltenen Erden (zwischen $Z = 60$ und $Z = 70$), deren geochemische Häufigkeitsverhältnisse wegen ihres gleichartigen chemischen Verhaltens besonders wenig von dem wahren abweichen dürften. Eine analoge Aus-

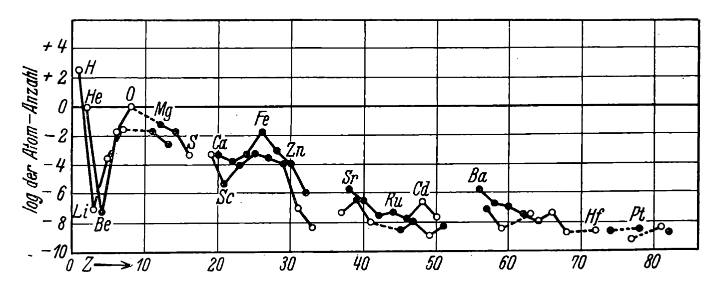


Fig. 33. Häufigkeit der chemischen Elemente in der Sonnenatmosphäre (nach RUSSELL, aus 46).

zeichnung erfahren die geraden Neutronenzahlen bei der Untersuchung der relativen Häufigkeiten der Isotope eines und desselben Elements (vgl. FLÜGGE, 35). Diese Erscheinung hängt zweifellos mit der größeren Bindungsenergie der geraden Kerne zusammen. Es ist jedoch nicht sicher, ob sie durch die größere Stabilität dieser Kerne gegen Zerstörung zu erklären ist, da die Temperaturen im Sterninnern zur Entfernung von im Kern gebundenen Protonen oder Neutronen nicht ausreichen dürften. Vielleicht handelt es sich vielmehr um eine Abhängigkeit des mittleren Wirkungsquerschnitts für die Einfangung relativ langsamer Teilchen von der Bindungsenergie des entstehenden Kerns; ein solches Verhalten wäre nach dem Mehrkörpermodell durchaus möglich.

Die Kurven zeigen ferner deutlich, daß die heutige Verteilung der Elemente kein „eingefrorenes Gleichgewicht" sein kann, das zu irgendeiner, die Umwandlungen ermöglichenden Temperatur gehört. Denn die Häufigkeit, mit der sich ein Teilchen in einem Zustand vom statistischen Gewicht g und der Energie E befindet, ist im Gleichgewichtszustand bei der Temperatur T durch $g e^{-E/kT}$ gegeben. Da ein wesentlicher Unterschied

in den statistischen Gewichten der Zustände, in denen Protonen und Neutronen sich in den verschiedenen Kernen befinden, nicht besteht, müßten bei jeder Temperatur die meisten Protonen und Neutronen in dem Zustand der Bindung in denjenigen Kernen vorhanden sein, welche den tiefsten Massendefekt pro Teilchen haben, also oberhalb des Eisens. Die Erfahrung zeigt, daß gerade dort die seltenen Elemente beginnen. Die heutige Verteilung der Elemente kann also nur aus einem noch nicht bis zum Gleichgewichtszustand gelangten Prozeß stammen.

Eine Theorie der Elemententstehung auf dieser Basis haben noch vor der Entdeckung des Neutrons ATKINSON und HOUTERMANS (7,6) entwickelt. Sie weisen darauf hin, daß bei den Temperaturen von etwa 20 Millionen Grad, die nach EDDINGTON im Sterninnern erreicht werden, die im Stern in großer Anzahl (vgl. Fig. 33) vorhandenen Protonen schon mit merklicher Wahrscheinlichkeit in leichte Kerne eindringen können. Der Temperatur entspricht eine mittlere kinetische Energie von etwa 3000 Volt, was bei den im Stern vorkommenden Dichten für Lithium Lebensdauern der Größenordnung einer halben Stunde, für Sauerstoff von einer halben Million Jahren, für Ne von einer Milliarde Jahren ergibt. Die wirksamen Protonen sind dabei nicht die in der MAXWELLschen Verteilung am häufigsten vorkommenden, sondern diejenigen einer bestimmten höheren Energie, die zwar seltener sind, aber mit größerer Wahrscheinlichkeit in die Kerne eindringen. Man kann abschätzen, daß die Energieerzeugung durch derartige Prozesse für die Erklärung der Sternlebensdauern ausreicht.

Nach diesem Bild sollte die Häufigkeit jedes Elements ungefähr proportional sein zu seiner Lebensdauer gegen denjenigen Prozeß, der es in das nächsthöhere Element verwandelt. Da diese Lebensdauer exponentiell mit der Kernladung wächst, müßte auch die Häufigkeit der Elemente exponentiell mit Z anwachsen. Dies ist von Li bis O ziemlich gut erfüllt (die Ordinatenskala in den Figuren ist logarithmisch). Oberhalb O würden die Lebensdauern rasch länger als die Lebensdauern der Sterne; Elemente oberhalb etwa Si dürften daher nicht mehr in merklicher Menge gebildet werden. Um ihr Vorhandensein zu erklären, mußte ATKINSON einen hypothetischen zweiten Prozeß der Eindringung von Protonen in Kerne einführen, dessen Wahrscheinlichkeit von Z unabhängig sein sollte. Es liegt heute sehr nahe, diesen Prozeß mit dem Vorhandensein von Neutronen in Verbindung zu bringen. Wenn es gelingt, einen im Stern hinreichend wahrscheinlichen Prozeß anzugeben, der freie Neutronen liefert, so wird man vielleicht schon mit Hilfe der heutigen physikalischen Kenntnisse eine Theorie des Elementaufbaus im Stern in Angriff nehmen können.

Viertes Kapitel

Das Problem des β-Zerfalls

§ 36. Die anschauliche Bedeutung der Neutrinohypothese

Über den β-Zerfall besitzen wir viel geringere theoretische Kenntnisse als über alle anderen Kernreaktionen. Wir wissen, daß sein Eintreten ebenso wie das der anderen Reaktionen an der Erfüllbarkeit einer Energiebilanz zwischen dem ursprünglichen und dem entstehenden System geknüpft ist und daher mit Hilfe der vorliegenden Kenntnisse über die Massendefekte in vielen Fällen vorausgesagt werden kann. Dagegen ist über den Mechanismus des Zerfalls wenig bekannt. Während in der Theorie der übrigen Kernreaktionen die grundlegenden Vorstellungen einigermaßen gesichert sind und nur die Frage nach der richtigen Art ihrer Anwendung auf die Erfahrung besteht, sind die Grundvorstellungen über den β-Zerfall selbst fragwürdiger Natur: wir besitzen zwar als ersten Ansatz die Neutrinohypothese (§ 3), wir hoffen aber, ihren genauen Sinn durch die Weiterentwicklung der Theorie selbst erst zu ermitteln. Es wird daher richtig sein, die Verschiedenartigkeit ihrer möglichen Bedeutungen durch einen Rückblick auf ihre Vorläufer zu erläutern, und dann, nach einer Diskussion ihrer Konsequenzen, die Erfahrungsresultate (§ 40) ohne den Versuch einer voreiligen Vereinheitlichung und Anpassung neben sie zu stellen.

Am Anfang der neueren theoretischen Diskussion des β-Zerfalls steht der Vorschlag von BOHR (14), die Ungültigkeit des Energiesatzes beim β-Zerfall anzunehmen. Er erschien als die konsequenteste Formulierung der damals bekannten Tatsachen. Noch ehe die in anderer Richtung deutenden Erfahrungen vorlagen, hat LANDAU (66) aber einen wichtigen theoretischen Einwand gegen ihn vorgebracht. Nach dem Äquivalenzprinzip muß die Änderung der trägen Masse eines Systems, mit der seine Energieänderung beim β-Zerfall gleichbedeutend ist, einer ebenso großen Änderung seiner schweren Masse entsprechen. Nun ist es nach der Gravitationstheorie unmöglich, daß unkompensierte Änderungen der schweren Masse stattfinden; wenn z. B. irgendwo im Raum plötzlich schwere Masse verschwindet, so tritt nach dem Formalismus der Theorie automatisch

eine Gravitationswelle auf, deren Feldenergie genau die fehlende Masse nach außen trägt. Da die schwere Masse auch eines isolierten radioaktiven Atoms eine klassisch meßbare Größe ist, würde die Annahme, diese kompensierende Welle werde in einer quantentheoretischen Fassung der Gravitationstheorie nicht mehr auftreten, als Widerspruch gegen das Korrespondenzprinzip erscheinen, und man wird eher umgekehrt sagen müssen: selbst wenn ein Formalismus für die Theorie des β-Zerfalls angegeben würde, bei dem der Energiesatz unerfüllt bliebe, so würde das Gravitationsfeld automatisch dafür sorgen, daß die verschwindenden Energiebeträge nicht vernichtet, sondern nur in eine unseren Meßmethoden sehr schwer zugängliche Form überführt würden. Es wäre voreilig, zwischen dieser Vorstellung der kompensierenden Gravitationswelle und der des Neutrinos eine Verbindung herzustellen; immerhin zeigt die Diskussion einer solchen Möglichkeit, wie tief einerseits die Erhaltungssätze in der Forderung einer einheitlichen physikalischen Naturbeschreibung begründet sind, und wie wenig andererseits das „Neutrino", das wir nur zur Befriedigung der Erhaltungssätze einführen, einem normalen materiellen Teilchen zu gleichen braucht.

Um die Vorstellung vom Wesen des Neutrinos zu präzisieren, ist es daher notwendig, sich eng an die einzelnen Erfahrungen über den β-Zerfall zu halten. Als Material liegt vor die Form der β-Spektren (d. h. die relative Häufigkeit der β-Elektronen als Funktion ihrer Energie) und die Beziehung zwischen der Zerfallsenergie eines β-labilen Kerns und seiner Lebensdauer.

Die charakteristische Größe eines β-Spektrums ist seine Maximalenergie. Daß überhaupt ein kontinuierliches Energiespektrum auftritt, das eine scharfe obere Grenze hat, ist schon durch die Annahme erklärt, daß sich eine vorgegebene Zerfallsenergie in nicht vorgegebener Weise auf zwei Teilchen verteilt. Diese Tatsache haben BECK und SITTE (8) schon kurz vor der Arbeit von FERMI hervorgehoben und in einer Theorie des β-Zerfalls verwertet, in welcher die gleichzeitige Erzeugung eines Elektrons und eines Positrons unter nachträglicher spurloser Vernichtung der individuellen Existenz des einen der beiden Teilchen angenommen wurde. Allerdings erscheinen die Zusatzannahmen, durch welche diese Theorie mit der Erfahrung in Einklang gebracht werden sollte, vom heutigen Standpunkt aus als willkürlich, und wir werden daher weiterhin annehmen, daß das zweite Teilchen tatsächlich emittiert wird und somit, da es nicht durch Ionisation längs seiner Bahn in Erscheinung tritt, ungeladen ist.

Eine weitere für ein β-Spektrum charakteristische Größe ist die mittlere Energie seiner Elektronen. Es zeigt sich, daß sie stets wesentlich kleiner

ist als die Hälfte der Maximalenergie. Die Spektren zeigen also eine starke Asymmetrie, die in der Neutrinohypothese dahin gedeutet werden muß, daß das Neutrino im Mittel einen größeren Energiebetrag übernimmt als das Elektron. Diese Asymmetrie läßt sich natürlich darstellen, wenn man die Wechselwirkung zwischen schweren und leichten Teilchen, die zur β-Emission führt, so wählt, daß sie in geeigneter Weise einen Unterschied zwischen Elektron und Neutrino macht. Man kann die Asymmetrie aber, wie PERRIN (77) zuerst bemerkt hat, schon bei der Annahme völliger Gleichartigkeit der auf die beiden leichten Teilchen wirkenden Kräfte erklären, wenn man die Masse des Neutrinos wesentlich kleiner ansetzt als die Masse des Elektrons. Denn wie man leicht zeigen kann (§ 39), verteilt sich bei einer hinsichtlich beider Teilchen symmetrischen potentiellen Energie die Zerfallsenergie so, daß beide Teilchen im Mittel über viele Prozesse denselben Impuls erhalten, und daher übernimmt das Neutrino wegen der Beziehung $E = p^2/2m$ einen um so größeren Bruchteil der Energie, je kleiner seine Masse ist. Diese Erklärung versagt freilich im Grenzfall sehr großer Geschwindigkeiten beider Teilchen, weil dann nach der Relativitätstheorie $E \sim cp$ wird, d. h. die Ruhmasse in die Beziehung zwischen Energie und Impuls nicht mehr eingeht. Quantitativ untersuchen wir diese Frage in § 38.

Zwischen der Zerfallsenergie und der Lebensdauer besteht eine zuerst von SARGENT (81) näher untersuchte Beziehung, die mit der GEIGER-NUTTALL-Beziehung beim α-Zerfall eine gewisse Ähnlichkeit hat. Da jedoch weder für Elektronen noch für Neutrinos die Annahme einer Abstoßung in der Nähe des Kerns als notwendig erscheint, beruht hier das Anwachsen der Zerfallswahrscheinlichkeit mit der Zerfallsenergie wohl nicht auf der Änderung der Durchdringlichkeit einer Potentialschwelle mit der Energie; nur für relativ langsame Positronen dürfte dieser Effekt noch wichtig werden. Vielmehr handelt es sich, wie aus der Theorie von FERMI quantitativ hervorgeht, hier um die Tatsache, daß mit wachsender Gesamtenergie die Anzahl der möglichen Aufteilungen des Energiebetrags, also die Zahl der zum gleichen Energiebetrag gehörigen verschiedenen Zellen im Phasenraum zunimmt; während die Übergangswahrscheinlichkeit in die einzelne Phasenraumzelle ungefähr konstant bleibt, wächst die gesamte Übergangswahrscheinlichkeit mit der Anzahl der Phasenraumzellen. Abweichungen von der eindeutigen Beziehung zwischen Energie und Lebensdauer kann man vielleicht durch die Annahme erklären, daß in einigen Fällen durch das Bestehen von Auswahlregeln die Übergangswahrscheinlichkeit in die einzelne Phasenraumzelle herabgesetzt ist.

§ 37. Grundlagen der Quantentheorie der Wellenfelder

Wenn man den Inhalt der Neutrinohypothese quantenmechanisch formulieren will, so stößt man auf gewisse formale Schwierigkeiten, die darauf beruhen, daß die beiden leichten Teilchen erst beim Zerfallsakt entstehen und somit die gesamte Teilchenanzahl nicht erhalten bleibt. Man kann also den Vorgang nicht mit der normalen Schrödingergleichung beschreiben, welche die Wellenbewegung in einem Konfigurationsraum der festen Dimensionszahl $3N$ ($N =$ Zahl der Teilchen) beherrscht. Für die Behandlung derartiger Probleme ist die Methode der Quantelung der Wellenfelder am bequemsten. Da sie nicht in demselben Sinn wie die normale Wellenmechanik als bekannt angesehen werden kann, geben wir im folgenden eine kurze Übersicht über ihre Grundgedanken und Endformeln unter Verzicht auf Beweise (eine ausführlichere Darstellung gibt Heisenberg [49], Anhang).

Nach der Wellenmechanik steht dem Korpuskelbild der Materie das Wellenbild zur Seite. Eine Reihe von Experimenten, wie z. B. die über Elektronenbeugung, läßt sich deuten, indem man gar nicht von Teilchen und ihren Bahnen spricht, sondern von einer kontinuierlich im Raum verteilten Wellenfunktion ψ, aus der nach den bekannten Formeln die Ladungs-, Massen, Impuls-, Energiedichte usw. an jedem Raumpunkt ausgerechnet werden kann. Der strenge Formalismus der Quantenmechanik enthält sowohl die korpuskularen wie die Wellenerscheinungen als anschauliche Grenzfälle. Dementsprechend läßt er sich auf dem Weg über beide anschauliche Vorstellungen ableiten, indem man zu den Bewegungsgesetzen klassischer Korpuskeln bzw. Wellen die Forderungen der Quantenkinematik hinzufügt. Geht man vom Korpuskelbild aus, so erhält man hierbei die normale Form der Quantenmechanik. Der andere Weg, der die Bewegung eines anschaulichen Wellenfeldes den Quantenbedingungen unterwirft, führt zu einem mathematisch genau äquivalenten Formalismus. Wir dürfen daher die Eigenschaften dieses Formalismus im folgenden einfach unter Berufung auf das anschauliche Wellenbild und die vom Korpuskelbild her bekannten Regeln der Quantenkinematik zusammenstellen.

Bei der „Quantelung des Korpuskelbildes“ werden die klassischen Größen q, p, E usw. durch Matrizen ersetzt, zwischen denen gewisse Vertauschungsrelationen gelten. Ebenso ersetzt man bei der „Quantelung des Wellenbildes“ die „klassische“, im dreidimensionalen Raum (nicht im Konfigurationsraum!) definierte Wellenfunktion ψ durch eine Matrix.

Jordan und Wigner (58) haben gezeigt, daß für Teilchen, die dem Pauli-Prinzip genügen, die Vertauschungsrelationen lauten

$$\left.\begin{aligned} \psi^*(\mathfrak{r}\varrho)\psi(\mathfrak{r}'\varrho') + \psi(\mathfrak{r}'\varrho')\psi^*(\mathfrak{r}\varrho) &= \delta(\mathfrak{r}'-\mathfrak{r})\delta_{\varrho\varrho'} \\ \psi^*(\mathfrak{r}\varrho)\psi^*(\mathfrak{r}'\varrho') + \psi^*(\mathfrak{r}'\varrho')\psi^*(\mathfrak{r}\varrho) &= 0 \\ \psi(\mathfrak{r}\varrho)\psi(\mathfrak{r}'\varrho') + \psi(\mathfrak{r}'\varrho')\psi(\mathfrak{r}\varrho) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (37.1)$$

Die Komponenten des Ortsvektors sind hier reine Zahlen, gewissermaßen Indizes, welche die verschiedenen ψ unterscheiden. Die Wellenfunktion und die aus ihr gebildeten Bestimmungsgrößen des Wellenfeldes haben somit ebenso wie physikalische Größen des Korpuskelbildes im allgemeinen keinen bestimmten Zahlwert, jedoch besitzen sie gewisse Eigenwerte: diejenigen Zahlwerte, welche man bei einer Messung realisiert finden kann. So ergibt sich z. B., daß der Ausdruck $\int\psi^*(\mathfrak{r})\,\psi(\mathfrak{r})d\mathfrak{r}$, über ein beliebiges Volumen integriert, als Eigenwerte nur die ganzen Zahlen annehmen kann; anschaulich gesprochen: die Teilchenzahl in jedem Volumen ist stets eine ganze Zahl. Man sieht, daß sich in der Tat die Korpuskeleigenschaften der Materie automatisch als Konsequenz der Quantelung des Wellenbildes ergeben, so wie bei der üblichen Quantelung des Korpuskelbildes die Welleneigenschaften folgen.

Eine weitere Größe, die einfache Eigenwerte besitzt, ist die Besetzungszahl eines stationären Zustandes. Man kann nämlich die Wellenfunktionen ψ nach einem Orthogonalsystem entwickeln, das man dann in jedem speziellen Problem möglichst zweckmäßig zu wählen hat:

$$\psi(\mathfrak{r}\varrho) = \sum_k a_k \psi_k(\mathfrak{r}\varrho) . \quad (37.2)$$

Hier sollen die ψ_k gewöhnliche Funktionen des Raumes und der Spinkoordinate sein; die Matrixeigenschaft der ψ steckt nur noch in den Entwicklungskoeffizienten a_k. Sie genügen nach (37.1) und (37.2) den Vertauschungsrelationen

$$\left.\begin{aligned} a_i^* a_k + a_k a_i^* &= \delta_{ik} \\ a_i a_k + a_k a_i &= 0 \\ a_i^* a_k^* + a_k^* a_i^* &= 0 . \end{aligned}\right\} \quad (37.3)$$

Die Größen

$$N_k = a_k^* a_k \quad (37.4)$$

haben dann nur die Eigenwerte 0 und 1; da N_k die Anregungsstärke des Zustandes k angibt, also, korpuskular ausgedrückt, die Zahl von Teilchen, die sich im Zustand k befinden, ist hierin die Ganzzahligkeit der Teilchenzahlen und das Pauli-Verbot enthalten.

Nach der Quantentheorie des Korpuskelbildes kann man den Zustand jedes Systems durch eine Eigenfunktion charakterisieren, welche von den Eigenwerten physikalisch meßbarer Größen (in der SCHRÖDINGERschen Schreibweise speziell von denen der Teilchenörter) abhängt, und deren Absolutquadrat die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, daß der betreffende Eigenwert bei einer Messung an dem System wirklich realisiert vorgefunden wird. Eine analoge Eigenfunktion χ kann man in der Quantentheorie der Wellen einführen. Für unsere Zwecke am bequemsten schreibt man sie als Funktion der Besetzungszahlen N_k, so daß $|\chi(N_1, N_2, \ldots N_k \ldots)|^2$ die Wahrscheinlichkeit angibt, mit der man im ersten Zustand N_1, im zweiten N_2, allgemein im k-ten Zustand N_k Teilchen findet. Man muß also streng auseinanderhalten: den Operator $\psi(\mathfrak{r})$, dem im Korpuskelbild die Observablen $q, p, \ldots$ entsprechen und die Zahl $\chi(N_k)$, der im Korpuskelbild die Eigenfunktion im Konfigurationsraum $\psi(q, p)$ entspricht. Der Operator ψ wirkt auf χ; d. h. eine Wechselwirkungsenergie, die eine bestimmte Funktion von ψ ist, ruft Änderungen der Besetzungszahlen hervor. Man kann (37.3) befriedigen, wenn man für a^* und a die folgenden Operatoren wählt:

$$a_k^* = N_k \Delta_k V_k; \quad a_k = V_k \Delta_k N_k \,. \tag{37.5}$$

Hierbei sind die N_k nun die Zahlwerte 0 oder 1 der Besetzungszahlen. Die V_k sind „Vorzeichenfunktionen", d. h. Größen, die je nach der Anzahl der besetzten Zustände gleich $+1$ oder -1 sind; gibt man eine gewisse (übrigens willkürliche) Numerierung der Zustände vor, so ist

$$V_k = \prod_{i \leq k} (1 - 2N_i) \,. \tag{37.6}$$

Δ_k schließlich ist der eigentliche Operator; er verwandelt alle hinter ihm stehenden N_k in $1 - N_k$ (d. h. Null in Eins und Eins in Null) nach der Gleichung

$$\Delta_k f(N_k) = f(1 - N_k) \,. \tag{37.7}$$

Man erkennt aus dieser Definition, daß a_k, auf die χ-Funktion eines unbesetzten Zustandes angewandt, daraus die eines besetzten macht, auf die χ-Funktion eines besetzten Zustandes angewandt dagegen verschwindet. Denn war

$$\chi(N_k) = \delta_{N_k, 0} \,, \tag{37.8}$$

so ist

$$a_k^* \chi(N_k) = N_k \delta_{1-N_k, 0} = N_k \delta_{N_k, 1} = 1; \tag{37.9}$$

war dagegen

$$\chi(N_k) = \delta_{N_k, 1} \,, \tag{37.10}$$

so ist

$$a_k^* \chi(N_k) = N_k \delta_{1-N_k, 1} = N_k \delta_{N_k, 0} = 0 \,. \tag{37.11}$$

Man kann also sagen: a_k^* verwandelt einen unbesetzten Zustand in einen besetzten. Genau analog zeigt man, daß a_k, weil hier Δ_k auch noch auf den nachfolgenden Faktor N_k wirkt, umgekehrt einen besetzten Zustand in einen unbesetzten verwandelt. Soll der Energieaustausch die gesamte Teilchenzahl des Systems nicht ändern, sondern nur Übergänge zwischen verschiedenen Zuständen hervorrufen, so muß daher stets ein a_i^* mit einem a_k multipliziert auftreten.

Diese Bedingung ist in den üblicherweise auftretenden Energieausdrücken in der Tat erfüllt. Die Rechnung nach der hier entwickelten Methode geschieht nämlich in genauer Fortsetzung der Analogie zur Quantelung des Korpuskelbildes, indem man eine „Schrödingergleichung"

$$(H - E)\chi = 0 \tag{37.12}$$

löst, in welcher der Hamiltonoperator H diejenige Funktion von ψ ist, welche nach dem anschaulichen Wellenbild die Energie darstellt. So ist z. B. die kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_\varrho \int d\mathfrak{r} \left(\operatorname{grad} \psi^*(\mathfrak{r}_\varrho), \operatorname{grad} \psi(\mathfrak{r}_\varrho)\right) \tag{37.13}$$

und die potentielle Energie in einem äußeren Potential $U(\mathfrak{r})$

$$E_{\text{pot}} = \sum_\varrho \int d\mathfrak{r}\, \psi^*(\mathfrak{r}_\varrho)\, U(\mathfrak{r})\, \psi(\mathfrak{r}_\varrho)\,. \tag{37.14}$$

E_{kin} und E_{pot} enthalten in der Tat beide den Faktor $\sum\limits_{ik} a_i^* a_k$; setzt man z. B. in (37.14) aus (37. 2) ein, so erhält man

$$E_{\text{pot}} = \sum_{ik} a_i^* a_k \sum_\varrho \int \psi_i^*(\mathfrak{r}_\varrho)\, U(\mathfrak{r})\, \psi_k(\mathfrak{r}_\varrho)\, d\mathfrak{r}\,, \tag{37.15}$$

d. h. den Operator, der ein Teilchen im Zustand k verschwinden und im Zustand i wieder auftauchen läßt, multipliziert mit dem zum Übergang $k \to i$ gehörigen Matrixelement der potentiellen Energie und summiert über alle möglichen Übergänge.

Zu (37.13) und (37.14) tritt nun in der Hamiltonfunktion noch die potentielle Energie der Wechselwirkung der Teilchen untereinander. Diese wird, soweit die Wechselwirkung von der üblichen Art, also z. B. elektromagnetischer Natur, ist, wieder Produkte $a_i^* a_k$ enthalten. Jedoch hindert uns formal nichts daran, auch Ausdrücke hinzuschreiben, in denen nur a^* oder nur a steht. Wir haben hier also in der Tat einen Formalismus zur Verfügung, der die Entstehung und Vernichtung von Teilchen in bequemer Weise auszudrücken vermag. Hiervon machen wir im folgenden Gebrauch.

§ 38. Ansatz der Theorie von FERMI

Beim β-Zerfall haben wir es mit vier Teilchensorten zu tun, also mit vier verschiedenen Wellenfeldern, die wir durch folgende Bezeichnungen unterscheiden wollen:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Protonen: } \Psi(\mathfrak{r}\varrho) = \sum_k A_k \Psi_k(\mathfrak{r}\varrho), \quad \text{Elektronen: } \psi(\mathfrak{r}\varrho) = \sum_s a_s \psi_s(\mathfrak{r}\varrho) \\ &\text{Neutronen: } \Phi(\mathfrak{r}\varrho) = \sum_l B_l \Phi_l(\mathfrak{r}\varrho), \quad \text{Neutrinos: } \varphi(\mathfrak{r}\varrho) = \sum_t l_t \varphi_t(\mathfrak{r}\varrho). \end{aligned}\right\} \quad (38.1)$$

Die Summen sind wie (37.2) zu verstehen; die Operatoren A_k, B_l, a_s, b_t wirken auf die Funktion χ, welche nun von den Besetzungszahlen N_k, N_l, N_s, N_t der Zustände der vier Teilchensorten abhängt. Die Funktionen Ψ_k, Φ_t, ψ_s, φ_t werden am zweckmäßigsten so gewählt, daß sie die Eigenfunktionen der Teilchen unter Vernachlässigung der zum β-Zerfall führenden Wechselwirkung darstellen, so daß diese β-Zerfallskraft die einzige Ursache für Übergänge zwischen diesen Zuständen ist. Man muß zu diesem Zweck für Ψ_k und Φ_l die Eigenfunktionen eines im Kern gebundenen Protons bzw. Neutrons wählen. ψ_s und φ_t sind dagegen Eigenfunktionen freier Teilchen, und zwar sind die ψ_s die Eigenfunktionen des kontinuierlichen Spektrums im Coulombfeld des betrachteten Kerns (der Einfluß des diskreten Spektrums kann wegen der hohen Zerfallsenergien vernachlässigt werden), die φ_t sind dagegen, da auf das Neutrino elektrische Ladungen keine Kraft ausüben, einfach ebene Wellen.

Um nun in dieser Schreibweise die Wechselwirkungsenergie auszudrücken, die zum β-Zerfall Anlaß gibt, müssen wir einen Energieoperator bilden, der das Verschwinden eines Neutrons mit dem Entstehen eines Protons, eines Elektrons und eines Neutrinos koppelt; er muß also die Faktoren $A_k^* B_l a_s^* b_t^*$ enthalten. Bei der Bestimmung der Ortsabhängigkeit der Energie ließ FERMI (33) sich von der Analogie zur Strahlungstheorie leiten. Dort ist die Wechselwirkungsenergie zwischen einer elektrischen Dichteverteilung $\varrho(\mathfrak{r})$ und einer elektrischen Feldstärke, deren Potential $A(\mathfrak{r})$ ist, durch $\varrho(\mathfrak{r})A(\mathfrak{r})$ gegeben. D. h. die elektrischen Feldgrößen am Ort $\mathfrak{r}$ wirken nur auf die Materie am selben Ort $\mathfrak{r}$; wir haben es mit einer Nahewirkungstheorie zu tun. Neben dieser Analogie legt der Wunsch, die Theorie in möglichst einfacher Weise relativistisch invariant formulieren zu können, die Verwendung eines Nahewirkungsansatzes auch für die Theorie des β-Zerfalls nahe. Da ferner der Entwicklungskoeffizient der Wellenfunktion jedes der vier Teilchen nur linear vorkommen darf, kann der Ansatz keine höheren Potenzen der Wellenfunktionen enthalten,

und es ist somit am einfachsten, die potentielle Energie der „β-Kraft" direkt den Wellenfunktionen der vier Teilchen an einem und demselben Ort proportional zu setzen:

$$H_\beta = g\left\{\int \Psi^*(\mathfrak{r})\Phi(\mathfrak{r})\psi^*(\mathfrak{r})\varphi^*(\mathfrak{r})d\mathfrak{r} + \int \Psi(\mathfrak{r})\Phi^*(\mathfrak{r})\psi(\mathfrak{r})\varphi(\mathfrak{r})d\mathfrak{r}\right\} \quad (38.2)$$

Möglich wäre natürlich auch eine Abhängigkeit des Ansatzes nicht von den Wellenfunktionen selbst, sondern von ihren Ableitungen. Über derartige Ansätze vgl. (38. 6—7). Das komplex konjugierte Glied mußte in (38.2) hinzugefügt werden, um den Ausdruck hermitisch zu machen, so daß seine Eigenwerte reell werden. Physikalisch bedingt dieses Glied die Möglichkeit der Umkehrung des Prozesses (gesternte Größen sind durch ungesternte ersetzt und umgekehrt) und garantiert damit die Symmetrie des Ansatzes hinsichtlich der Vertauschung der Zeitrichtungen.

In (38.2) ist die Abhängigkeit der β-Energie vom Spin der Teilchen noch offen gelassen. Da die beiden leichten Teilchen beim β-Zerfall im allgemeinen Energien von der Größenordnung mc^2 erhalten, kann diese Frage nur durch eine relativistisch invariante Formulierung von (38.2) befriedigend beantwortet werden. Da der Integrand in (38.2) gewissermaßen als Produkt einer „Dichte der schweren Teilchen" mit einer „Dichte der leichten Teilchen" aufgefaßt werden kann, liegt es nahe, aus Ψ^* und Φ einerseits und ψ^* und φ^* andererseits jeweils einen Strom-Dichte-Vierervektor zu bilden und diese miteinander zu multiplizieren. Für die schweren Teilchen ist ein solcher Vektor

$$\mathfrak{a} = \sum_{\varrho\sigma} \Psi^*(\mathfrak{r}\varrho)\vec{\alpha}_{\varrho\sigma}\Phi(\mathfrak{r}\sigma)\ ; \quad a_4 = \sum_{\varrho} \Psi^*(\mathfrak{r}\varrho)\Phi(\mathfrak{r}\varrho)\ , \quad (38.3)$$

$\vec{\alpha}$ bezeichnet dabei den Vektor, dessen Komponenten die drei DIRACschen α-Matrizen sind. Für die leichten Teilchen tritt dagegen eine gewisse Schwierigkeit auf, weil ein nach dem Schema (38.3) gebildetes Produkt zweier gesternter Größen kein Vierervektor ist. FERMI hat die Art der Verknüpfung des Spinindizes von ψ und φ angegeben, bei der ein Vierervektor entsteht. Wir wählen aber eine formal etwas bequemere Schreibweise, die durch die Berücksichtigung der DIRACschen Löchertheorie möglich wird.

Die Entdeckung positronenemittierender β-Strahler durch CURIE und JOLIOT hat nämlich gezeigt, daß wir auf die Elektronen jedenfalls die Löchervorstellung anwenden, d. h. die in der relativistischen Wellengleichung von DIRAC auftretenden Zustände negativer Energie bis auf einige „Löcher", die Positronen, als ausgefüllt betrachten müssen. Die Entstehung eines Positrons tritt dann in der Theorie formal als Vernichtung eines Elektrons negativer Energie in Erscheinung. Dieser Prozeß wird also durch den

zweiten Summanden in (38.2) beschrieben. Dort ist ψ mit $\Psi\Phi^*$ multipliziert, also, wie es der anschaulichen Vorstellung entspricht, mit dem Operator, der ein Proton verschwinden und ein Neutron entstehen läßt. Dagegen ist der vierte Faktor φ nicht so leicht zu deuten. Er entspricht dem Verschwinden eines Neutrinos; das würde also bedeuten, daß der Prozeß nur stattfinden könnte, wenn der Kern von außen mit Neutrinos beschossen würde und eines von ihnen „absorbieren" könnte. Dem widerspricht die genaue Parallelität aller Phänomene an Positronen- und Elektronenstrahlen. Man kann sich aber leicht aus der Schwierigkeit helfen, wenn man auch für die Neutrinos die Löchervorstellung einführt. Wir müssen auf das Neutrino, wenn wir relativistisch rechnen, ohnehin die DIRACsche Wellengleichung anwenden, in der nur $e = 0$ und m gleich der später zu bestimmenden Ruhmasse des Neutrinos (vermutlich auch $= 0$) zu setzen ist; wir nehmen also an, daß auch hier die Zustände negativer Energie bis auf einige Löcher, die wir „Antineutrinos" nennen können, besetzt sind. Der Operator φ im zweiten Summanden von (38.2) kann dann zugleich die Entstehung eines Antineutrinos bewirken, womit die volle Symmetrie zwischen Positronen- und Elektronenprozessen hergestellt ist (WICK, 98).

Beachten wir nun, daß die Löchertheorie hinsichtlich der Vorzeichen der beiden entgegengesetzten Teilchen völlig symmetrisch ist, daß man also z. B. auch die Positronen bzw. Antineutrinos formal als „wirkliche Teilchen" und die Elektronen bzw. Neutrinos als „Löcher" behandeln kann, ohne daß die physikalischen Ergebnisse dadurch beeinflußt würden, so können wir (38.2) durch eine veränderte Namengebung in eine bequemere Form bringen: wir nennen von nun an das bei Positronenemission ausgesandte zweite Teilchen Neutrino, das bei Elektronenemission ausgesandte Antineutrino. Damit rückt der Operator φ neben ψ^* und φ^* neben ψ, d. h. statt (38.2) ergibt sich die Gleichung

$$H_\beta = g \int \Psi^*(\mathfrak{r})\,\Phi(\mathfrak{r})\,\psi^*(\mathfrak{r})\,\varphi(\mathfrak{r})\,d\mathfrak{r} + \text{konjugiertes Glied}, \qquad (38.4)$$

in der die gewünschten zwei Produkte je einer gesternten und einer ungesternten Größe stehen. Als relativistisch invariante Formulierung von (38.4) bietet sich nunmehr an

$$\left.\begin{aligned} H_\beta = g \int \Big\{ & \sum_\varrho \Psi^*(\mathfrak{r}\varrho)\,\Phi(\mathfrak{r}\varrho) \sum_\sigma \psi^*(\mathfrak{r}\sigma)\,\varphi(\mathfrak{r}\sigma) \\ & - \sum_{\varrho\sigma} \Psi^*(\mathfrak{r}\varrho)\,\vec{\alpha}_{\varrho\sigma}\,\Phi(\mathfrak{r}\sigma) \sum_{\tau\upsilon} \psi^*(\mathfrak{r}\tau)\,\vec{\alpha}_{\tau\upsilon}\,\varphi(\mathfrak{r}\upsilon) \Big\}\, d\mathfrak{r} + \text{konjugiertes Glied.} \end{aligned}\right\} (38.5)$$

Außer (38.5) ist allerdings noch eine Reihe anderer relativistisch invarianter Formulierungen möglich (11 a), die aber für die Berechnung der

β-Zerfallswahrscheinlichkeit, bei der man die Geschwindigkeit der schweren Teilchen neben der Lichtgeschwindigkeit vernachlässigen und daher das Glied mit den α-Matrizen streichen kann, keine wesentlich abweichenden Resultate liefern kann; nur auf die Berechnung der Austauschkraft (§ 41) haben die Unterschiede Einfluß. Einen wichtigen Unterschied gegen (38.5) bedeutet es dagegen, wenn man Ableitungen der Wellenfunktionen der leichten Teilchen in H_β einführt. Z. B. wurde der Ansatz

$$\left.\begin{aligned} H_\beta^{(0,1)} = g_{0,1} \int \Big\{ & \sum_\varrho \Psi^*(\mathfrak{r}\varrho)\Phi(\mathfrak{r}\varrho) \sum_{\sigma\tau} \psi^*(\mathfrak{r}\sigma)\beta_{\sigma\tau}\frac{\partial\varphi(\mathfrak{r}\tau)}{\partial t} \\ & - \big(\sum_{\varrho\sigma} \Psi^*(\mathfrak{r}\varrho)\vec{\alpha}_{\varrho\sigma}\Phi(\mathfrak{r}\sigma),\ \sum_{\tau v} \psi^*(\mathfrak{r}\tau)\beta_{\tau v}\,\mathrm{grad}\,\varphi(\mathfrak{r}v)\big)\Big\} d\mathfrak{r} \\ & + \text{konjugiertes Glied.} \end{aligned}\right\} \quad (38.6)$$

von Konopinski und Uhlenbeck (61) und der Ansatz

$$\left.\begin{aligned} H_\beta^{(1,1)} = g_{1,1} \int \Big\{ & \Big(\sum_\varrho \Psi^*(\mathfrak{r}\varrho)\Phi(\mathfrak{r}\varrho) + \sum_{\varrho\sigma} \Psi^*(\mathfrak{r}\varrho)\vec{\alpha}_{\varrho\sigma}\Phi(\mathfrak{r}\varrho)\Big) \\ & \cdot \Big(\sum_\sigma \frac{\partial\psi^*(\mathfrak{r}\sigma)}{\partial t}\frac{\partial\varphi(\mathfrak{r}\sigma)}{\partial t} - \sum_{\tau v} \vec{\alpha}_{\tau v}\big(\mathrm{grad}\,\psi^*(\mathfrak{r}\tau),\ \mathrm{grad}\,\varphi(\mathfrak{r}v)\big)\Big)\Big\} d\mathfrak{r} \\ & + \text{konjugiertes Glied.} \end{aligned}\right\} \quad (38.7)$$

von Bethe und Peierls (11) vorgeschlagen, um gewisse Erfahrungen (vgl. § 40) besser darzustellen. Die Indizes (m, n) geben nach einer von Konopinski und Uhlenbeck (62) eingeführten Bezeichnungsweise die Zahl von Differentiationen an, die auf die Wellenfunktion des Elektrons bzw. Neutrinos ausgeübt werden. Es ist heute wohl noch nicht möglich, aus der Erfahrung einen dieser Ansätze endgültig als den richtigen zu bestätigen; auch muß man durchaus mit der Möglichkeit rechnen, daß die richtige Hamilton-Funktion komplizierter gebaut ist, etwa aus einer Linearkombination $\sum_{mn} c_{mn} H_\beta^{(m,n)}$ besteht.

§ 39. Berechnung der Zerfallswahrscheinlichkeit

Um die Wahrscheinlichkeit des Zerfalles eines β-labilen Kerns aus dem Ansatz (38.5) zu berechnen, lösen wir die Schrödingergleichung $(H - E)\chi = 0$ durch ein Näherungsverfahren. Da es sich um die Berechnung einer zeitlichen Änderung der Besetzungszahlen handelt, haben wir für E den Operator $\hbar i\partial/\partial t$ einzusetzen. Die allgemeine Lösung der Gleichung ist eine

Linearkombination der zu festen Besetzungszahlen gehörigen Eigenlösungen mit zeitabhängigen Koeffizienten:

$$\chi(N_k N_l N_s N_t) = c(N_k N_l N_s N_t t)\, e^{-\frac{i}{\hbar}\left(\sum_k N_k E_k + \sum_l N_l E_l + \sum_s N_s E_s + \sum_t N_t E_t\right) t}. \tag{39.1}$$

Die Klammer im Exponenten stellt einfach die Gesamtenergie eines durch die Besetzungszahlen N_k, N_l, N_s, N_t charakterisierten Gebildes dar; sie ist nämlich gleich der Summe der Energien aller der Zustände, für die $N = 1$ ist. Der Koeffizient c gibt die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Besetzungszahl an. In dem Ausgangszustand, in dem nur ein Neutron im Zustand l vorhanden ist, ist also χ von der Form

$$\chi_0 = \delta_{N_l,1} \prod_n \delta_{N_n,0}\, e^{-\frac{i}{\hbar} E_l t}. \tag{39.2}$$

Der Index n faßt dabei alle von dem speziellen Wert l verschiedenen Indizes zusammen. In Worten heißt (39.2): An der Stelle „$N_l = 1$, alle anderen $N = 0$" ist $\chi_0 = e^{-\frac{i}{\hbar} E_l t}$, an allen anderen Stellen des „N-Raumes" ist $\chi_0 = 0$.

Wir setzen nun die Gesamtenergie

$$H = H_0 + H_\beta \tag{39.3}$$

und treiben normale Störungsrechnung. Da die Zustände k, l, s, t so gewählt sind, daß sie Eigenzustände des ungestörten Systems darstellen, kann man H_0 gleich seinem Eigenwert für den betrachteten Zustand setzen:

$$H_0 \chi_0 = E_l \chi_0 . \tag{39.4}$$

Entwickelt man nun auch χ:

$$\chi = \chi_0 + \chi_1 , \tag{39.5}$$

so folgt aus der Schrödingergleichung

$$\left\{ H - \hbar i \frac{\partial}{\partial t} \right\} \chi = 0 \tag{39.6}$$

unter Berücksichtigung von (39.3—5) und (38.5), daß χ_1 nur von Null verschieden ist für die Besetzungszahlen, die dem Zustand entsprechen, in dem das Neutron verschwunden, ein Proton in irgendeinem Zustand k und ein Elektron in irgendeinem Zustand s entstanden und ein Neutrino in irgendeinem Zustand negativer Energie t verschwunden, d. h. ein Antineutrino im Zustand t entstanden ist. Das Auftreten des Antineutrinos bezeichnen wir symbolisch durch eine Besetzungszahl $N_t = -1$; dabei

ist zu beachten, daß diesem Teilchen eine positive Energie zukommt. Wir erhalten durch Einsetzen in (39.6) für die Zeitableitung von c

$$\dot{c}_1(1_k, 0_l, 1_s, -1_t, t) = -\frac{i}{\hbar}\overline{H}_\beta(klst)e^{\frac{i}{\hbar}(E_k - E_l + E_s + E_t)t} \tag{39.7}$$

mit der Abkürzung

$$\overline{H}_\beta(klst) = g\sum_{\varrho\sigma}\int \Psi_k^*(\mathfrak{r}\varrho)\Phi_l(\mathfrak{r}\varrho)\psi_s^*(\mathfrak{r}\sigma)\varphi_t(\mathfrak{r}\sigma)d\mathfrak{r}. \tag{39.8}$$

$\overline{H}_\beta$ ist also einfach das Matrixelement von H_β zu dem betrachteten Übergang unter der in erster Näherung erlaubten Vernachlässigung der Glieder, welche die Geschwindigkeit der schweren Teilchen enthalten. Integration von (39.7) unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $c_1(t=0) = 0$ liefert

$$c_1(1_k, 0_l, 1_s, -1_t, t) = -\overline{H}_\beta(klst)\frac{e^{\frac{i}{\hbar}(E_k - E_l + E_s + E_t)} - 1}{E_k - E_l + E_s + E_t}. \tag{39.9}$$

Nach dieser Formel scheinen zunächst beliebige Endzustände k, s, t möglich zu sein. Jedoch werden automatisch die einschränkenden Bedingungen der Erhaltungssätze erfüllt. Durch Interferenz verschwindet nämlich, wenn alle betrachteten Teilchen frei sind, $\overline{H}_\beta(klst)$ stets außer für Zustände, für die der Impulssatz gilt. Sind die schweren Teilchen im Kern gebunden, so kann unser Rechenverfahren, das den Kern als festes äußeres Potential behandelt, die Bedingung des Impulssatzes nicht ausdrücken; jedoch ist die Korrektur dann klein von der Ordnung des Verhältnisses der Massen von Neutron bzw. Proton und Kern. Der Energiesatz äußert sich darin, daß nur Endzustände, die einen nahezu verschwindenden Energienenner $E_k - E_l + E_s + E_t$ ergeben, eine mit der Zeit immer weiter anwachsende Amplitude erhalten; in der aus der Strahlungstheorie bekannten Weise (Ausrechnung im Anhang II) ergibt sich

$$|c_1(1_k, 0_l, 1_s, -1_t, t)|^2 = t\cdot\frac{2\pi}{\hbar}\frac{|\overline{H}_\beta(klst)|^2}{\Delta E}. \tag{39.10}$$

Wir bestimmen zunächst $1/\Delta E$, d. h. die Zahl der Zustände pro Energieintervall in der Umgebung des Endzustandes. Hierbei ist zu beachten, daß der Energiesatz den Endzustand noch nicht völlig festlegt. Selbst wenn wir zunächst annehmen, das Proton könne nur in einem Zustand so entstehen, so bleibt noch die Möglichkeit einer beliebigen Verteilung der Energiedifferenz $E_k - E_l$ auf Elektron und Neutrino. Der Faktor von t in (39.10), der direkt die Übergangswahrscheinlichkeit angibt, muß also, da die Zustände beider leichten Teilchen kontinuierlich verteilt sind,

noch zu dE proportional sein, wenn man etwa nach der Wahrscheinlichkeit der Entstehung eines Elektrons einer Energie zwischen E_s und $E_s + dE$ und eines Neutrinos zwischen E_t und $E_t - dE$ fragt. Dies folgt in der Tat rechnerisch aus der Tatsache, daß die Zahl der Zustände, bei denen zugleich die Energie des Elektrons im Intervall dE_s und die des Neutrinos im Intervall dE_t liegt, gleich dem Produkt der Anzahl der Zustände für jedes einzelne Teilchen ist. Die Zahl der Zustände eines freien Teilchens im Energieintervall dE ist nach der in § 28 durchgeführten Abschätzung

$$\frac{dE}{\Delta E} = \frac{8\pi V}{h^3} p^2 \frac{dp}{dE} dE = \frac{8\pi V}{h^3} \frac{p^2}{v} dE. \tag{39.11}$$

Der Faktor 2 gegen die dortige Abschätzung rührt daher, daß wir hier den Spin berücksichtigen. V ist das Normierungsvolumen, v die Teilchengeschwindigkeit. Das Produkt zweier solcher Faktoren, bei denen nur einmal p_s, v_s, dE_s und einmal p_t, v_t, dE_t eingesetzt ist, bildet die Anzahl von Zuständen beider Teilchen in den Intervallen dE_s und dE_t. Da wir die Anzahl pro Energieintervall eins suchen, müssen wir das eine der beiden Differentiale durch Eins ersetzen; das andere ist dann das oben mit dE bezeichnete Intervall, zu dem $|c|^2$ proportional ist. Es folgt also

$$\frac{1}{\Delta E} = dE \left(\frac{8\pi V}{h^3}\right)^2 \frac{p_s^2 p_t^2}{v_s v_t}. \tag{39.12}$$

Eine genaue Berechnung des Matrixelements $\overline{H}_\beta$ ist sehr viel schwieriger. Eine erste Vereinfachung ergibt sich aus der Tatsache, daß die Wellenlänge der leichten Teilchen von der Größenordnung $\hbar/mc$ und somit groß gegen den Kernradius ist. Man kann die Eigenfunktionen der leichten Teilchen daher in erster Näherung konstant halten; es folgt so

$$\overline{H}_\beta(klst) = \sum_\sigma \psi_s^*(0\sigma)\varphi_t(0\sigma) \int \sum_\varrho \Psi_k^*(\mathfrak{r}\varrho)\Phi_l(\mathfrak{r}\varrho) d\mathfrak{r}. \tag{39.13}$$

Das Integral über die Eigenfunktionen der schweren Teilchen können wir nicht ausführen, da diese Funktionen nicht bekannt sind. Man wird es aber, da Ψ_k und Φ_l im Kerninnern auf Eins normiert sind, im allgemeinen ungefähr gleich Eins setzen können, sofern die Zustände k und l zum selben Drehimpuls des schweren Teilchens (oder, falls das Einkörpermodell unanwendbar ist, des gesamten Kerns) gehören, dagegen wegen der Orthogonalität der Winkelanteile der Eigenfunktionen gleich Null, wenn die Drehimpulse von k und l verschieden sind. $\varphi(0\sigma)$ kann einfach gleich $1/\sqrt{V}$-mal einer nur vom Spin abhängigen Funktion gesetzt werden, da die Eigenfunktionen des Neutrinos ebene Wellen sind, die im Volumen V normiert

sind. Für $\psi(0\sigma)$ muß man den Wert der DIRACschen Eigenfunktion im Coulombfeld am Kernrand einsetzen. Zur anschaulichen Diskussion des Resultats genügt zunächst die vereinfachende Annahme, auch die Elektroneneigenfunktionen seien ebene Wellen. Die Summation über σ ergibt dann wegen der Normierung Eins, und es bleibt

$$\overline{H}_{\beta}(klst) \approx \frac{g}{V}\int\sum_{\varrho}\Psi^*(\mathfrak{r}_{\varrho})\Phi(\mathfrak{r}_{\varrho})d\mathfrak{r} = \frac{g}{V}\overline{H}_{kl}. \tag{39.14}$$

Die gesamte Übergangswahrscheinlichkeit wird somit

$$\frac{|c_1|^2}{t} = W dE \approx \frac{2\pi}{\hbar}\left(\frac{8\pi}{h^3}\right)g^2\left|\overline{H}_{kl}\right|^2\frac{p_s^2 p_t^2}{v_s v_t}dE. \tag{39.15}$$

Diese Formel liefert zunächst eine wichtige Auskunft über die Ruhmasse des Neutrinos. In der Umgebung des Wertes $E_t = 0$ kann man den Faktor p_s^2/v_s in erster Näherung als konstant ansetzen; man erhält dann, wenn die Ruhmasse m_ν des Neutrinos endlich ist, $W \sim p_t^2/v_t = m_\nu^2 v_t$, d. h. W proportional zu $\sqrt{E_t}$. Ist m_ν sehr klein, so gilt diese unrelativistische Formel nur für sehr kleines E_t und für $m_\nu = 0$, wenn sich also das Neutrino wie ein Lichtquant auch bei den kleinsten Impulsen mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, folgt $w \sim p_t^2/c = cE_t^2$. Fig. 34 zeigt die aus (39.15) folgende Form der β-Strahlspektren für $m_\nu = m$, $m_\nu = {}^1/_5\, m$, $m_\nu = 0$. Man erkennt erstens die Asymmetrie, die wir in § 36 als Argument für kleines m_ν angeführt haben, und sieht zweitens, daß nur der Verlauf mit $m_\nu = 0$ mit der empirischen Form des oberen Endes der Spektren vereinbar ist (vgl. dazu Fig. 38 und 39). Man wird also die Ruhmasse des Neutrinos gleich Null setzen.

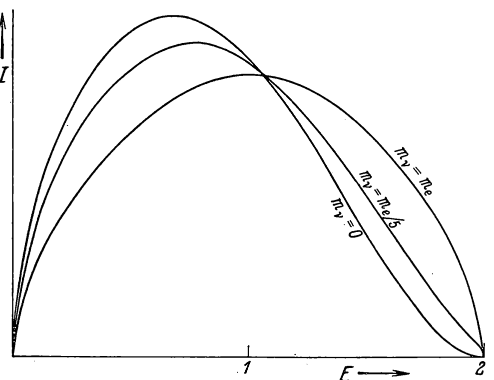


Fig. 34. Theoretische β-Strahlspektren nach dem Ansatz (0,0) für $Z = 0$ und verschiedene Werte der Neutrinomasse. Abszisse: Energie in mc^2, Ordinate Intensität.

Zum quantitativen Vergleich mit der Erfahrung ist (39.19) vor allem im Gebiet kleiner p_s nicht genau genug; dagegen läßt sich über den Zusammenhang zwischen Maximalenergie und Lebensdauer ein qualitativer Schluß ziehen. Integriert man (39.15) über dE, so folgt aus Dimensions-

gründen, wenn für das Elektron nur unrelativistische Energien in Betracht kommen (wie z. B. bei RaD, wo die obere Grenze des Spektrums bei ~ 40000 e-Volt liegt), $\int W dE \sim \int^{p_{\max}} (p^4/v c) p\, dp \sim p_{\max}^5 \sim E_{\max}^{5/2}$, dagegen wenn der größte Beitrag zum Spektrum schon von nahezu mit Lichtgeschwindigkeit bewegten Elektronen kommt,

$$\int W dE \sim \int^{p_{\max}} (p^4/c^2) c\, dp \sim p_{\max}^5 \sim E_{\max}^5 .$$

D. h. die totale Zerfallswahrscheinlichkeit ist stets zur fünften Potenz des Maximalimpulses und somit im unrelativistischen Grenzfall zur $^5/_2$-ten, im extrem relativistischen zur fünften Potenz der Energie proportional.

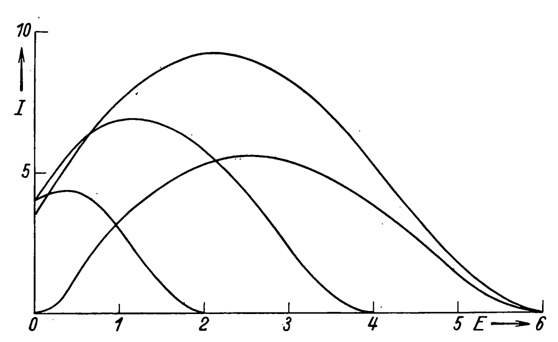


Fig. 35. Theoretisches Energiespektrum für β-Strahler mit $Z = 82$ nach dem Ansatz (0,0). Abszisse Energie in mc^2, Ordinate Intensität in willkürlichen Einheiten (die Kurven sind nicht normiert). Die durch den Nullpunkt gehende Kurve gilt für Positronen, die andern drei Kurven für Elektronen.

In (39.15) lassen sich leicht auch die Änderungen anbringen, zu denen die Einführung von Ableitungen der Wellenfunktionen in H_β führt. Bei freien Teilchen ist grad $\psi_s = p_s \psi_s$, d. h. $\overline{H}_\beta(klst)$ erhält beim Ansatz (0, 1) im wesentlichen den Faktor p_t^2, bei (1, 1) den Faktor $p_s^2 \cdot p_t^2$. In beiden Fällen würde nun das flache Einmünden der Energieverteilung in $E_{\max}$ auch ohne die Annahme $m_\nu = 0$ erklärlich; der Vergleich mit der Erfahrung (§ 40) zeigt aber, daß die Annahme $m_\nu = 0$ auch bei diesen Ansätzen notwendig bleibt. Die totale Übergangswahrscheinlichkeit wird nach (0, 1) proportional zu $p_{\max}^7$, nach (1, 1) zu $p_{\max}^9$.

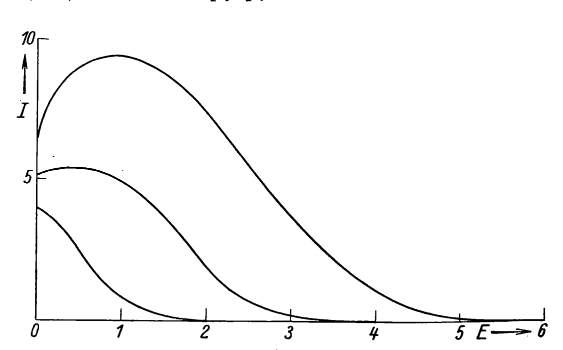


Fig. 36. Theoretisches Energiespektrum für β-Strahler mit $Z = 82$ nach dem Ansatz (0, 1). Die drei Kurven gelten für Elektronen der Maximalenergien im 2, 4, 6 mc^2.

Völlig falsch ist (39.15) und die dazu gehörige Fig. 34 für kleine Energien der Elektronen. Da $\psi_s(0\sigma)$ für $E_s = 0$ im Coulombfeld divergiert, mündet das wirkliche Spektrum für Elektronen bei $E_s = 0$ in einen endlichen Koordinatenwert ein. Umgekehrt wird bei Emission von Positronen, für die alle Schritte der Rechnung bis (39.15) genau so wie für Elektronen verlaufen, die Wahrscheinlichkeit sehr kleiner Energien exponentiell klein. Die Resultate, die nur durch langwierige Rechnungen nach der DIRACschen Wellengleichung im Coulombfeld gewonnen werden können, sind in den Fig. 35 bis 37 zusammengefaßt.

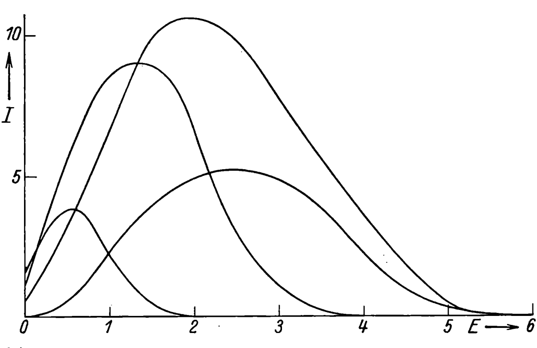


Fig. 37. Theoretisches Energiespektrum für β-Strahler mit $Z = 82$ nach dem Ansatz (1, 1). Bedeutung der Kurven wie in Fig. 35.

§ 40. Vergleich mit der Erfahrung

Als die wesentliche Leistung der Theorie von FERMI muß man es ansehen, daß sie die allgemeinen Züge des Zerfallsphänomens durch eine einfache Modellvorstellung richtig wiedergibt. Ein mehr ins einzelne gehender Vergleich zwischen Theorie und Erfahrung, der vor allem die Form der β-Spektren und den Zusammenhang zwischen Zerfallsenergie und Lebensdauer betreffen muß, stößt dagegen heute noch auf Schwierigkeiten. Einmal ist es meßtechnisch sehr schwer, genau die Form der β-Spektren zu bestimmen; dies mag durch die Fig. 38 und 39 illustriert werden, welche jeweils dieselbe Kurve nach den Messungen verschiedener Verfasser wiedergeben. Außerdem wirkt eine Reihe von

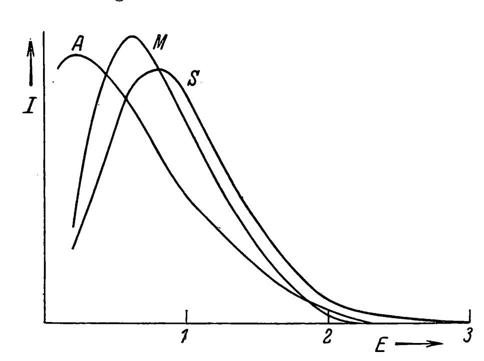


Fig. 38. Empirisches Energiespektrum der β-Elektronen von RaE ($Z = 83$); A nach ALICHANOW, ALICHANIAN und DZELEPOW, M nach MADGWICK, S nach SCOTT. Energieeinheit mc^2.

Nebenerscheinungen dahin, daß die theoretisch zu erwartenden Gesetzmäßigkeiten nicht ganz einfacher Natur sind und daher nicht leicht zur vorläufigen phänomenologischen Ordnung der Erfahrungen verwendet werden können. Daher geben wir hier nur einige Andeutungen über die Art eines genauen Vergleichs mit der Erfahrung, der wohl erst in einiger Zeit, nach einer weiteren Vervollkommnung der empirischen Kenntnisse, wird durchgeführt werden können.

Die heute vorliegenden Daten über den Zusammenhang zwischen Energie und Lebensdauer sind in Fig. 40 und Tabelle 9 zusammengestellt. Die ausgezogenen Kurven verbinden die natürlich radioaktiven Kerne, auf welche SARGENT (81) die Behauptung eines gesetzmäßigen Zusammenhangs begründet hat. Die gestrichelten Geraden sind die aus (39.15) bzw. den entsprechenden Gleichungen für die anderen Ansätze folgenden theoretischen Kurven für $v \approx c$. Die Konstanten g sind dabei so gewählt, daß für ^{20}F Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung erreicht ist. Es ist die Frage, wie weit der empirische Zusammenhang durch die Theorie richtig wiedergegeben ist und wie das Auftreten zweier empirischer Kurven für die natürlich Radioaktiven und die Abweichung der künstlich radioaktiven Elemente von dem SARGENTschen Zusammenhang zu deuten ist.

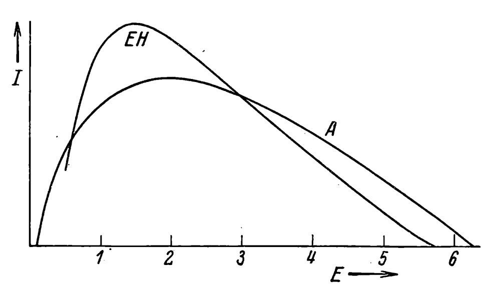


Fig. 39. Empirisches Energiespektrum von ^{30}P ($Z = 15$); *A* nach ALICHANOW, ALICHANIAN und DZELEPOW, *EH* nach ELLIS und HENDERSON. Energieeinheit mc^2.

Die theoretischen Geraden in Fig. 40 sind unter Vernachlässigung der Kernladung gezeichnet. Es ist daher richtig, sie nicht mit der empirischen Kurve für die schweren Kerne, sondern mit der für die allerleichtesten zu vergleichen. Nur ist dort die Zahl der Daten noch zu klein und die Streuung der Werte zu groß. Mit wachsender Kernladung nimmt die Amplitude der Wellenfunktion am Kern und daher auch die Zerfallswahrscheinlichkeit für Elektronen zu, für Positronen ab, und zwar um so mehr, je geringer die Energie der β-Teilchen ist. Die Unmöglichkeit, alle Elemente unabhängig von Z durch ein empirisches Gesetz zusammenzufassen, wird dadurch verständlich. Jedoch zeigt sich der geforderte Gang der zu einer festen Zerfallsenergie gehörigen Lebensdauer mit der Ordnungszahl nicht oder nur sehr undeutlich. Dies kann daran liegen,

daß auch für die leichteren Elemente in Wirklichkeit zwei oder noch mehr Kurven auftreten, die sich in einem Diagramm wie Fig. 40 unübersichtlich übereinander lagern. Solange man nicht weiß, welches Element auf welcher Kurve liegen sollte, läßt sich eine nähere Analyse dieser Figur schwer vornehmen.

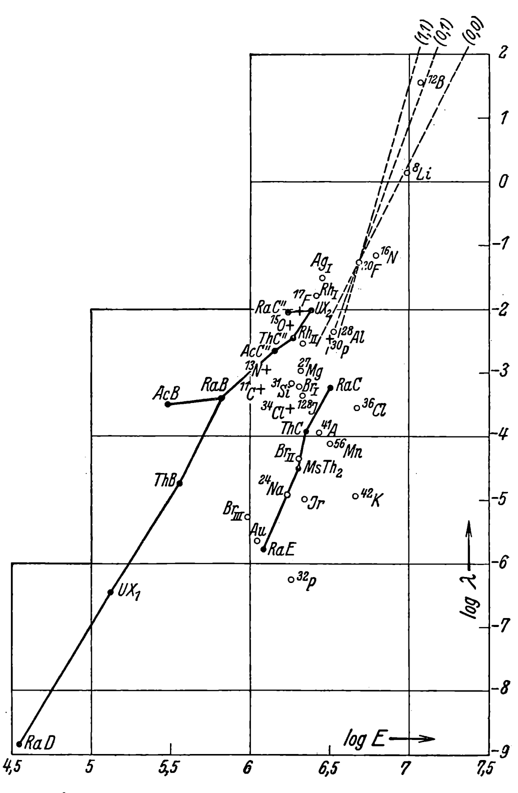


Fig. 40. Zusammenhang zwischen Energie und Lebensdauer der β-Strahler. • natürlich Radioaktive, o künstlich radioaktive Elektronenstrahler, + künstlich radioaktive Positronenstrahler. — Zusammenhang der natürlich Radioaktiven nach SARGENT. --- Theoretischer Zusammenhang für $v \approx c$ und verschiedene Ansätze. Römische Ziffern als Indizes (Br_I usw.) unterscheiden verschiedene β-Spektren desselben Elements, die noch nicht bestimmten Isotopen zugeordnet werden konnten.

Daß zwei Kurven auftreten, kann man nach FERMI damit erklären, daß der Übergang in erster Näherung verboten ist. Z. B. können die Zustände k und l verschiedenen Drehimpuls haben. Dann verschwindet $\overline{H}_{kl}$, und $\overline{H}_\beta(klst)$ ist nur deshalb von Null verschieden, weil ψ und φ im Kern nicht genau konstant sind, oder anschaulich gesagt, weil die leichten Teilchen mit einer gewissen, kleinen Wahrscheinlichkeit einen Drehimpulsbetrag übernehmen können. Die Zerfallswahrscheinlichkeit wird dann etwa im Verhältnis $(r_0/\lambda)^2$ herabgesetzt, d. h. um einen Faktor der Größenordnung 1/100. Eine Wahrscheinlichkeit ähnlicher Größenordnung für einen an sich verbotenen Übergang liefern die in der Ableitung des § 39 vernachlässigten relativistischen Glieder. Rechnet man für die schweren Teilchen relativistisch, so ist der Bahndrehimpuls keine Konstante der Bewegung mehr, sondern wird mit dem Spin gekoppelt; wenn man den Einfluß dieser Spinkoppelung proportional

Tabelle 9. Konstanten des β-Zerfalls

Element	Z	A	Ladungs-vorzeichen der Elektronen	Maximal-energie in 10^6 Volt	Zerfalls-konstante λ in $\sec^{-1}$	Literatur
Li	3	8	–	9,5	1,4	37
B	5	12	–	11,5	$3{,}5 \cdot 10^{+1}$	38
C	6	11	+	1,15	$5{,}5 \cdot 10^{-4}$	37
N	7	13	+	1,3	$1{,}1 \cdot 10^{-3}$	37, 64
N	7	16	–	6,0	$7{,}0 \cdot 10^{-2}$	37
O	8	15	+	1,7	$5{,}5 \cdot 10^{-3}$	37
F	9	17	+	2,1	$9{,}6 \cdot 10^{-3}$	64
F	9	20	–	4,8	$5{,}8 \cdot 10^{-2}$	37
Na	11	24	–	1,7	$1{,}25 \cdot 10^{-5}$	64
Mg	12	27	–	$\sim 2{,}05$	$1{,}15 \cdot 10^{-3}$	54
Al	13	26	+	$\sim 1{,}8$	$1{,}15 \cdot 10^{-1}$	39
Al	13	28	–	3,3	$4{,}5 \cdot 10^{-3}$	22
Si	14	31	–	1,8	$7{,}2 \cdot 10^{-4}$	64
P	15	30	+	~ 3	$3{,}5 \cdot 10^{-3}$	2, 27
P	15	32	–	2	$5{,}5 \cdot 10^{-7}$	1, 4, 64
Cl	17	34	+	$\sim 1{,}8$	$2{,}9 \cdot 10^{-4}$	39
Cl	17	36	–	4,8	$2{,}9 \cdot 10^{-4}$	64
A	18	41	–	2,7	$1{,}15 \cdot 10^{-4}$	64
K	19	42	–	3,5	$1{,}2 \cdot 10^{-5}$	64
Mn	25	56	–	3,2	$7{,}8 \cdot 10^{-5}$	1
Br	35	80 ?	–	2,0	$6{,}3 \cdot 10^{-4}$	1
Br	35	82 ?	–	2,05	$4{,}6 \cdot 10^{-5}$	1
Br	35		–	0,95	$5{,}4 \cdot 10^{-6}$	1
Rh	45		–	2,6	$1{,}6 \cdot 10^{-2}$	1
Rh	45		–	2,1	$3{,}0 \cdot 10^{-3}$	1
Ag	47		–	2,8	$3{,}2 \cdot 10^{-2}$	1
J	53	128	–	2,1	$4{,}7 \cdot 10^{-4}$	1
Ir	77		–	2,2	$1 \cdot 10^{-5}$	1
Au	79		–	1,1	$2{,}3 \cdot 10^{-6}$	1
AcC″	81	207	–	1,40	$2{,}43 \cdot 10^{-3}$	81
ThC″	81	208	–	1,82	$3{,}73 \cdot 10^{-3}$	81
RaC″	81	210	–	1,70	$8{,}7 \cdot 10^{-4}$	81
RaD	82	210	–	0,035	$1{,}0 \cdot 10^{-9}$	81
AcB	82	211	–	0,30	$3{,}21 \cdot 10^{-4}$	81
ThB	82	212	–	0,36	$1{,}82 \cdot 10^{-5}$	81
RaB	82	214	–	0,65	$4{,}31 \cdot 10^{-4}$	81
RaE	83	210	–	1,22	$1{,}61 \cdot 10^{-6}$	81
ThC	83	212	–	2,20	$1{,}24 \cdot 10^{-4}$	81
RaC	83	214	–	3,15	$5{,}86 \cdot 10^{-4}$	81
$MsTh_2$	89	228	–	2,05	$3{,}14 \cdot 10^{-5}$	81
UX_1	90	234	–	0,13	$3{,}28 \cdot 10^{-7}$	81
UX_2	91	234	–	2,32	$1{,}01 \cdot 10^{-2}$	81

$(v/c)^2$ setzen kann, so wird auch hier die Abweichung von den Auswahlregeln von der Größenordnung 1/100 sein.

Völlig ungeklärt ist die Abweichung der natürlich radioaktiven Isotope von Kalium und Rubidium von dieser Gesetzmäßigkeit. Man wird die Annahme, es handle sich hier um einen erst in vierter oder fünfter

Näherung erlaubten Übergang (GAMOW) kaum für eine befriedigende Erklärung halten können, obwohl sich zur Zeit keine andere zu bieten scheint (vgl. hierzu KLEMPERER, 60).

Ein systematischer Vergleich der empirischen mit der theoretischen Form der Spektren ist noch nicht möglich. Leicht erkennbare Merkmale der Spektren, die in Einzelfällen schon hinreichend sichergestellt werden können, sind ihre Asymmetrie und ihr Verlauf in der Nähe der Maximalenergie.

Die Größe der Asymmetrie könnte eine Entscheidung darüber herbeiführen, ob der Kraftansatz hinsichtlich der Wellenfunktionen von Elektron und Neutrino symmetrisch gewählt werden darf. Die Form des Positronenspektrums von ${}^{30}_{15}P$ (Fig. 39) kann zweifellos weder mit der Kurve nach dem Ansatz (0, 0) noch mit der nach (1, 1), sondern höchstens mit der (in Fig. 36 nicht eingezeichneten) Kurve nach (0, 1) vereinbart werden. Jedoch treten bei einem derartigen Schluß zwei Schwierigkeiten auf. Erstens haben alle experimentellen Fehler die Tendenz zur Erhöhung der gemessenen Zahl langsamer Teilchen. Zweitens gelten die theoretischen Kurven nur dann, wenn der Restkern nur in einem einzigen Zustand k zurückbleiben kann. Tatsächlich wird im allgemeinen auch eine Anregung des Restkerns beim Zerfallsprozeß möglich sein. Zwar nimmt die Übergangswahrscheinlichkeit mit der Gesamtenergie der beiden emittierten leichten Teilchen stark ab. Aber immerhin wird bei relativ niedrigen Anregungsstufen noch eine merkliche Wahrscheinlichkeit für den Übergang in einen angeregten Zustand vorhanden sein, und außerdem kann es vorkommen, daß der Übergang in den Grundzustand in erster Näherung verboten ist und daher die angeregten Endzustände sogar bevorzugt sind. Einen experimentellen Beweis für diese Vermutung liefert die sehr intensive γ-Strahlung, die nach vielen β-Zerfällen auftritt. In einem solchen Fall ist nun das β-Spektrum die Überlagerung mehrerer Spektren des von der Theorie geforderten Typus. Die mittlere Energie wird dann durch eine Mittelung über alle Teilübergänge bestimmt, die Maximalenergie dagegen durch den Übergang in den tiefsten Zustand allein; hieraus kann eine sehr starke Asymmetrie des beobachteten Gesamtspektrums folgen (MOTT und ELLIS). Es ist fraglich, ob die vorliegenden Experimente ausreichen, um das Vorhandensein einer die Kernanregung verratenden γ-Strahlung in Fällen wie ${}^{30}P$ mit Sicherheit nachzuweisen oder auszuschließen.

Die obere Grenze wird, soweit sichere Beobachtungen vorliegen, stets mit waagerechter Tangente erreicht. Neuere Arbeiten (64) scheinen sogar zu zeigen, daß die Kurven nicht wie $(E-E_{\max})^2$, sondern wie $(E-E_{\max})^4$ in diesen Punkt einmünden. Demnach würden nur Ansätze der Form

$(x, 1)$ in Betracht kommen. Allerdings ist die theoretische Form für das Spektrum eines in erster Näherung verbotenen Übergangs noch nicht vollständig untersucht. Immerhin wäre es eigenartig, wenn alle genauer untersuchten Spektren verbotenen Übergängen angehörten, und man kann daher den Schluß auf die Form $(x, 1)$ wohl für zuverlässig halten.

Über das Verhalten der Spektren bei kleinen Elektronenenergien ist noch sehr wenig bekannt. Für Elektronen ist ein Beginnen des Spektrums bei einem hohen Ordinatenwert wie nach $(0, 0)$ oder gar $(0, 1)$ nicht wahrscheinlich; bei den Protonen von ^{30}P haben ELLIS und HENDERSON (27) sogar unterhalb 200 kV gar keine Teilchen gefunden. Dies deutet auf einen Ansatz der Form $(1, x)$. Im ganzen genügt vielleicht der Ansatz $(1, 1)$ den Erfahrungen über die Form bei sehr großen und sehr kleinen Energien bisher am besten, während der Ansatz $(0, 1)$ die beobachteten Asymmetrien am zwanglosesten erklärt. Jedoch kann von definitiven Ergebnissen noch nicht die Rede sein.

§ 41. Ableitung der Austauschkraft und des magnetischen Zusatzmoments der schweren Teilchen

Da wir die Austauschwechselwirkung zwischen Proton und Neutron als Folge einer virtuellen Emission und Reabsorption leichter Teilchen auffassen, muß aus einer Theorie des β-Zerfalls die Größe der Austauschkraft quantitativ folgen. Für die FERMIsche Theorie haben TAMM und IWANENKO (87) eine erste Abschätzung der Kraft gegeben. Wir zeigen im folgenden (vgl. 95), daß der Ansatz eines Austauschpotentials vom Typ (14.4) tatsächlich eine konsequente Annäherung an die Lösung der Schrödingergleichung für ein aus zwei schweren Teilchen und dem Feld der leichten Teilchen bestehendes System darstellt. Ferner untersuchen wir die zur Austauschkraft analogen Kräfte zwischen gleichen Teilchen. Schließlich zeigen wir nach WICK (99, vgl. 95), daß auch die Abweichung des magnetischen Moments des Protons vom Wert μ_k und die Existenz eines magnetischen Moments des Neutrons eine Konsequenz der Möglichkeit des β-Zerfalls ist.

Wir gehen zur Berechnung der Austauschkraft aus von einem Zustand, in dem ein Proton im Zustand k und ein Neutron im Zustand l, aber kein leichtes Teilchen vorhanden ist:

$$\chi_0 = \delta_{N_k,1}\,\delta_{N_l,1}\prod_n \delta_{N_n,0}\, e^{-\frac{i}{\hbar}(E_k+E_l)t}. \tag{41.1}$$

Wir führen wieder die Näherungsrechnung nach dem Schema von § 39 durch. Nun kann entweder das Neutron sich in ein Proton verwandeln unter Emission eines Elektrons und eines Antineutrinos, oder das Proton in ein Neutron unter Emission eines Positrons und eines Neutrinos. Es folgt analog (39.9) (über die andere Wahl der Integrationskonstante s. u.)

$$\chi_1(1_k, 1_{k'}, 1_s, -1_t) = -\frac{\overline{H}_\beta(k' l s t)\, e^{\frac{i}{\hbar}(E_{k'} - E_l + E_s + E_t)t}}{E_{k'} - E_l + E_s + E_t} \Delta_{k'} \Delta_l \Delta_s \Delta_t \chi_0 , \tag{41.2}$$

$$\chi_1(1_l, 1_{l'}, -1_{s'}, 1_{t'}) = -\frac{\overline{H}_\beta(k l' s t)\, e^{\frac{i}{\hbar}(E_{l'} - E_k + E_{s'} + E_{t'})t}}{E_{l'} - E_k + E_{s'} + E_{t'}} \Delta_k \Delta_{l'} \Delta_{s'} \Delta_{t'} \chi_0 . \tag{41.3}$$

Hierin bedeuten k', s, t und l', s', t' zunächst beliebige Zustände, die nur, wenn die schweren Teilchen frei sind, mit k bzw. l durch die Forderung des Impulssatzes verknüpft sind, weil das Matrixelement sonst verschwindet. Der Faktor, der aus den nach (37.7) definierten Δ-Operatoren und χ_0 besteht, gibt lediglich an, daß χ_1 nur von Null verschieden ist, wenn die Besetzungszahlen der angegebenen Zustände die angegebenen Werte 1 bzw. -1 haben und die aller anderen Zustände Null sind. Würde man verabreden, daß χ_1 an allen anderen Stellen gleich Null zu setzen wäre, so könnte man ihn fortlassen; für unser Problem ist es aber zweckmäßig, χ_1 direkt als Funktion von χ_0 zu schreiben.

Da die Austauschwechselwirkung auch stattfindet, wenn kein wirklicher β-Zerfall stattfinden kann, braucht der Energienenner in (41.2) nicht zu verschwinden; χ_1 bezeichnet nicht einen wirklich erreichbaren Endzustand, sondern einen Zwischenzustand, der jeweils nur während der Zeit $\hbar/E$ angenommen wird. Um einen energetisch möglichen Endzustand zu erreichen, muß man zur zweiten Näherung in χ fortschreiten, für welche aus (39.6) folgt

$$\left(H_0 - \hbar i \frac{\partial}{\partial t}\right)\chi_2 = -H_\beta \chi_1 = -H_{\beta\beta}\chi_0 . \tag{41.4}$$

Diese Gleichung definiert den Operator $H_{\beta\beta}$. χ_2 kann nur dann im Lauf der Zeit große Werte annehmen, wenn entweder der Übergang erster Näherung wieder rückgängig gemacht, also der Ausgangszustand wieder erreicht ist, oder wenn im Fall (41.2) das von Anfang an vorhandene Proton k, im Fall (41.3) das von Anfang an vorhandene Neutron l die beiden leichten Teilchen absorbiert, d. h. wenn der Endzustand durch die Besetzungszahlen $(1_{k'}, 1_{l'}, 0_s, 0_t)$ gekennzeichnet ist und außerdem $E_k + E_l = E_{k'} + E_{l'}$. Da dieses χ_2 wie χ_0 einen Zustand kennzeichnet, in

dem nur ein Proton und ein Neutron vorhanden ist, kann man also das Resultat der Störungsrechnung ausdrücken, indem man nicht annimmt, daß der Prozeß erst in einem bestimmten Zeitpunkt beginnt, sondern daß er dauernd stattfindet (daher haben wir in (41.2—3) die Integrationskonstante nicht so gewählt, daß χ_1 für $t = 0$ verschwindet); man kann dann eine neue Funktion der Besetzungszahlen der schweren Teilchen allein

$$X(N_k, N_l, t) = \chi_0 + \chi_2(N_k, N_l, 0_s, 0_t, t) \tag{41.5}$$

einführen und eine Wellengleichung für diese Funktion aufstellen. Man erhält sie, wenn man zu (41.4) die Definitionsgleichung von χ_0:

$$\left(H_0 - \hbar i \frac{\partial}{\partial t}\right) \chi_0 = 0 \tag{41.6}$$

addiert und auf der rechten Seite das vernachlässigbar kleine Glied $-H_{\beta\beta}\chi_2$ hinzufügt; es folgt

$$\left(H_0 + H_{\beta\beta} - \hbar i \frac{\partial}{\partial t}\right) X = 0. \tag{41.7}$$

Dies ist eine Wellengleichung für die schweren Teilchen allein; der Operator $H_{\beta\beta}$ muß also nun die Austauschkraft enthalten. Aus seiner Definition folgt, wenn man berücksichtigt, daß die Zwischenzustände s, t bzw. $s't'$ beliebig sind,

$$\left.\begin{aligned} H_{\beta\beta}\chi_0 = &-\sum_{st} \frac{\overline{H}^*_\beta(k l' s t)\,\overline{H}_\beta(k' l s t)}{(E_k' - E_l + E_s + E_t)} \Delta_k \Delta_l \Delta_{k'} \Delta_{l'} \chi_0 \\ &-\sum_{st} \frac{\overline{H}^*_\beta(k' l s t)\,\overline{H}_\beta(k' l s t)}{(E_k' - E_l + E_s + E_t)} \chi_0 + \text{konjugiertes Glied.} \end{aligned}\right\} \tag{41.8}$$

Die ausgeschriebenen Glieder sind die aus (41.2) folgenden, die konjugierten folgen aus (41.3). Das zweite Glied entspricht der Rückkehr in den Ausgangszustand; es ist gewissermaßen eine durch die Existenz des Feldes der leichten Teilchen verursachte Selbstenergie der schweren Teilchen. Dagegen entspricht das erste Glied dem Übergang des Protons zwischen k und k' und des Neutrons zwischen l und l'. Bei seiner Berechnung sind noch einige Vereinfachungen möglich. Da schwere und leichte Teilchen im Zwischenzustand im Mittel denselben Impuls haben, sind E_s und E_t im Mittel um etwa m/M größer als E_k und E_l. Wir können daher die Energien der schweren Teilchen im Nenner vernachlässigen. Ferner kommt der Hauptbeitrag zur $\sum_{st}$ von sehr hohen Energien der leichten Teilchen; daher ist es sicher zulässig, für ihre Wellenfunktionen ebene Wellen anzusetzen. Die Summation über s und t ist dann zu ersetzen

durch eine Integration über die Impulse. Es ist ferner aus demselben Grunde zulässig, für E_s und E_t einfach cp_s und cp_t zu schreiben. Setzt man, zunächst unter Vernachlässigung der Spinabhängigkeit, für $\overline{H}_\beta$ nach (39.8) ein, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} &H_{\beta\beta}(kk'll') \\ &= -\sum_{st}\frac{g^2}{E_s+E_t}\int \Psi_k(\mathfrak{r})\Phi_{l'}^*(\mathfrak{r})\psi_s(\mathfrak{r})\varphi_t^*(\mathfrak{r})d\mathfrak{r}\int \Psi_{k'}^*(\mathfrak{r}')\Phi_l(\mathfrak{r}')\psi_s^*(\mathfrak{r}')\varphi_t(\mathfrak{r}')d\mathfrak{r}'\Delta_k\Delta_{k'}\Delta_l\Delta_{l'} \\ &= \int d\mathfrak{r}\int d\mathfrak{r}'\Psi_{k'}^*(\mathfrak{r}')\Phi_{l'}^*(\mathfrak{r})J(\mathfrak{r}-\mathfrak{r}')\Psi_k(\mathfrak{r})\Phi_l(\mathfrak{r}')\Delta_k\Delta_{k'}\Delta_l\Delta_{l'} \end{aligned}\right\} \quad (41.9)$$

mit

$$J(\mathfrak{r}-\mathfrak{r}') = -\frac{g^2}{c\hbar^6}\int d\mathfrak{p}_s\int d\mathfrak{p}_t\frac{e^{\frac{i}{\hbar}(\mathfrak{p}_s-\mathfrak{p}_t)(\mathfrak{r}-\mathfrak{r}')}}{p_s+p_t}\left(1-\frac{(\mathfrak{p}_s\mathfrak{p}_t)}{p_sp_t}\right) = \frac{g^2}{4\pi^3c\hbar|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|^5}. \quad (41.10)$$

J ist hier gleich in der Form geschrieben, die aus der Berücksichtigung des Spins der leichten Teilchen und der Löchertheorie folgt; nach (41.9) würde der Faktor $(1-(\mathfrak{p}_s\mathfrak{p}_t)/p_sp_t)$ fortfallen. Wie man aus (41.9) erkennt, ist $H_{\beta\beta}$ also tatsächlich das Matrixelement einer Austauschenergie $J(\mathfrak{r}-\mathfrak{r}')P(\mathfrak{r}\mathfrak{r}')$ für den Übergang $kl\to k'l'$, multipliziert mit dem Operator, der diesen Übergang hervorruft.

Leider ist dieses Ergebnis nicht direkt auf die Erfahrung anwendbar. Denn $J(r)$ divergiert bei $r=0$ so stark, daß in diesem Potential keine stationären Zustände möglich sind. Nun gibt es einen physikalischen Grund dafür, das Gesetz nicht bis $r=0$ anzuwenden. Das zweite Glied von (41.8) ist nämlich, wenn man es so wie das erste ausrechnet, unendlich. D. h. die „FERMIsche Selbstenergie" der schweren Teilchen divergiert genau so wie die elektromagnetische Selbstenergie der Elektronen. Da die FERMIsche Theorie genau dem Formalismus der Strahlungsenergie nachgebildet ist, ist das nicht erstaunlich. Genau wie in der Strahlungstheorie ist es offenbar falsch, H_β als kleine Störung anzusehen, wenn der Abstand zwischen dem emittierenden und dem absorbierenden schweren Teilchen zu klein ist. Solange aber keine bessere Rechenmethode gefunden ist, kann man nur versuchen, durch willkürliche Zusatzvorschriften, die irgendwie der Einführung eines endlichen Teilchenradius entsprechen, die Divergenz zu vermeiden. Relativ konsequent und rechnerisch einfach ist es, durch die Einführung eines Zusatzfaktors $e^{-\alpha(p_s+p_t)}$ unter dem Integral (41.10) die hohen Impulse der leichten Teilchen abzuschneiden. Man erhält dann mit der Abkürzung $y=\hbar\alpha/r$

$$J(r) = -\frac{g^2}{2\pi^4c\hbar r^5}\left\{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}y-\frac{y}{(1+y^2)^3}\left(y^4+\frac{8}{3}y^2+3\right)\right\}. \quad (41.11)$$

Für kleine y, d. h. $r \gg \hbar\alpha$ geht dieser Ausdruck in (41.10) über, für große y, d. h. $r \ll \hbar\alpha$ dagegen in

$$J(r \to 0) = -\frac{2g^2}{5\pi^4 c\hbar^6 \alpha^5}\left(1 - \frac{25}{7}\frac{r^2}{\hbar^2\alpha^2} + \cdots\right). \tag{41.12}$$

J ist demnach bei $r = 0$ endlich und hat übrigens das entgegengesetzte Vorzeichen als für große r. Da die positiven Werte von J absolut genommen nie größer als ein Hundertstel des Wertes für $r = 0$ werden, ist für die Kraftwirkung nur der negative Anteil wesentlich, d. h. der Anteil, der das in § 14 zur Erzielung der Absättigung geforderte Vorzeichen hat.

Der Absolutwert und die Abfallsbreite der Austauschenergie ist durch die beiden Konstanten g und α festgelegt. Man kann, um Übereinstimmung mit der Erfahrung zu erreichen, etwa verlangen, daß $J(0) = a$ und $1/\alpha = b$ in dem in § 15 bestimmten Kraftgesetz sein solle. Der „Radius der schweren Teilchen" wäre dann von der Größenordnung des klassischen Elektronenradius. Für die Konstante g müßte man aber einen etwa 10^6mal größeren Wert ansetzen als nach dem Vergleich der β-Lebensdauern mit der Erfahrung (40.1). Auch diese Tatsache scheint darauf zu deuten, daß in Wirklichkeit Ableitungen der Wellenfunktionen im Potentialansatz stehen müssen. Denn da für die Austauschwechselwirkung leichte Teilchen von sehr viel größerer Energie und daher rascher veränderlicher Wellenfunktion maßgebend sind als für den β-Zerfall, so gewinnt man, wenn man $g_{m,n}$ so wählt, daß sich die richtigen β-Lebensdauern ergeben, in der Größe der Austauschkraft durch die Wahl des Ansatzes (m, n) einen Faktor $(\alpha m c/\hbar)^{2(m+n)} \approx (2\pi \cdot 137)^{2(m+n)}$ gegen die aus (0, 0) folgende Größe des Austauschpotentials. Vielleicht reicht der Ansatz (1, 1) schon zur Übereinstimmung mit der Erfahrung aus. Jedoch wäre es wohl verfrüht, diese Frage heute quantitativ entscheiden zu wollen.

Eine Schwierigkeit tritt auf, wenn man den Spin der schweren Teilchen berücksichtigt. Die Erfahrung spricht dafür, daß von den beiden möglichen Ansätzen für die Spinabhängigkeit der Austauschkraft (14.4) der Ansatz II, bei dem nur die Orte vertauscht werden, der richtige ist. Aus (38.5) folgt aber der Ansatz I; denn da er unabhängig von der Spinrichtung der leichten Teilchen die Spins der schweren Teilchen so aneinander koppelt, daß beim β-Zerfall der Spin des schweren Teilchens erhalten bleibt, haftet der Spin auch bei dem iterierten Prozeß, der zur Austauschwechselwirkung führt, am Ort. Heisenberg (vgl. 39) hat darauf hingewiesen, daß sich der Ansatz II in der Näherung, in der man die explizite Spinabhängigkeit der Kräfte vernachlässigen kann, ergibt, wenn man in (38.5) Φ mit φ vertauscht, d. h. die Spins der geladenen Teilchen untereinander und die der

ungeladenen Teilchen untereinander koppelt. Jedoch ergeben sich hierbei spinabhängige Kräfte, die nicht wie die elektromagnetischen Spinkräfte mit der Geschwindigkeit der schweren Teilchen gegen Null gehen, sondern stets dieselbe Größenordnung wie die spinunabhängigen haben. Man kann sie darstellen, indem man das Austauschpotential als Linearkombination von J_{I} und J_{II} schreibt; so folgt z. B. aus (38.5) bei Vertauschung von Φ und φ das Potential $J = 2J_{\mathrm{I}} + J_{\mathrm{II}}$, das mit der Erfahrung sicher unvereinbar ist. Vielleicht kann die Forderung einer erfahrungsgemäßen Spinabhängigkeit der Austauschkraft zu einer Entscheidung zwischen den verschiedenen Möglichkeiten der relativistisch invarianten Formulierungen der β-Zerfallstheorie führen. Dazu müßte aber zunächst eine konsequente Formulierung der Quantentheorie der Wellen für Hamiltonfunktionen, welche wie (38.6—7) zeitliche Ableitungen der Wellenfunktionen enthalten, gefunden werden, und hierbei ergeben sich vorläufig nicht überwundene Schwierigkeiten. Sicher scheint nur, daß jede Theorie der Kernspins, die nur die elektromagnetischen Spinkräfte berücksichtigt, fehlerhaft ist (vgl. § 13).

Wir untersuchen nun die Kraft zwischen gleichen Teilchen, die aus der Möglichkeit des β-Zerfalls folgt. Sie tritt in vierter Näherung auf. Seien etwa zwei Neutronen vorgegeben, so muß zuerst jedes der beiden ein Paar leichter Teilchen emittieren und dann das vom anderen Neutron emittierte Paar absorbieren. Man erhält so die zu (41.8) analoge Formel (in der die Energien der schweren Teilchen bereits neben denen der leichten vernachlässigt sind):

$$\left.\begin{aligned} &H_{\beta\beta\beta\beta}\chi_0 \\ &\quad = -\sum_{k_1 k_2 s s' t t'} \frac{H_\beta^*(k_1 l_1' s' t') H_\beta^*(k_2 l_2' s t) H_\beta(k_1 l_1 s t) H_\beta(k_2 l_2 s' t')}{(E_{s'} + E_{t'})(E_s + E_t + E_{s'} + E_{t'})(E_{s'} + E_{t'})} \Delta_{l_1}\Delta_{l_1'}\Delta_{l_2}\Delta_{l_2'}\chi_0 \\ &\quad\quad + \text{weitere ähnlich gebaute Glieder.} \end{aligned}\right\} \quad (41.13)$$

Wir schreiben diese Formel wie (41.9) aus. Dabei lassen wir die Argumente der Wellenfunktionen zur Vereinfachung der Schreibweise fort; sie ergeben sich aus den dahinterstehenden Integrationsvariablen:

$$\left.\begin{aligned} &H_{\beta\beta\beta\beta}(l_1 l_1' l_2 l_2') = -\sum_{k_1 k_2 s s' t t'} \frac{g^4}{(E_{s'} + E_{t'})^2 (E_s + E_t + E_{s'} + E_{t'})} \\ &\cdot \int \Psi_{k_1} \Phi_{l_1'}^* \psi_{s'} \varphi_{t'}^* d\mathfrak{r} \int \Psi_{k_2} \Phi_{l_2'}^* \psi_s \varphi_t^* d\mathfrak{r}' \int \Psi_{k_1}^* \Phi_{l_1} \psi_s^* \varphi_t d\mathfrak{r}'' \int \Psi_{k_2}^* \Phi_{l_2} \psi_{s'}^* \varphi_{t'} d\mathfrak{r}''' \Delta_{l_1}\Delta_{l_1'}\Delta_{l_2}\Delta_{l_2'}. \end{aligned}\right\} \quad (41.14)$$

Die Summe über s, s', t und t' ergibt nach dieser Gleichung eine Funktion $K(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}''', \mathfrak{r}' - \mathfrak{r}'')$, welche also nicht mehr von allen vier Koordinaten

einzeln, sondern von den Differenzen $\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'''$ und $\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}''$ abhängt. Die Summe über k_1 und k_2 ergibt nach der Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{k_1} \Psi^*_{k_1}(\mathfrak{r}'') \Psi_{k_1}(\mathfrak{r}) = \delta(\mathfrak{r}'' - \mathfrak{r}) \tag{41.15}$$

die δ-Funktionen von $(\mathfrak{r}'' - \mathfrak{r})$ und $(\mathfrak{r}''' - \mathfrak{r}')$. Man kann dann also die Integration über $\mathfrak{r}''$ und $\mathfrak{r}'''$ ausführen und erhält die Funktionswerte an den Stellen $\mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{r}'$. Im ganzen folgt, wenn man $K(x, x)$ kurz $K(x)$ nennt

$$\left.\begin{aligned} &H_{\beta\beta\beta\beta}(l_1 l_1' l_2 l_2') \\ &= \int d\mathfrak{r} \int d\mathfrak{r}' \Phi^*_{l_1'}(\mathfrak{r}) \Phi_{l_2'}(\mathfrak{r}') K(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}') \Phi_{l_1}(\mathfrak{r}) \Phi_{l_2}(\mathfrak{r}') \Delta_{l_1} \Delta_{l_1'} \Delta_{l_2} \Delta_{l_2'}. \end{aligned}\right\} \tag{41.16}$$

Dies ist tatsächlich das Übergangselement von l_1, l_2 nach l_1', l_2' einer Kraft zwischen Neutron und Neutron. Bemerkenswert ist, daß die Argumente der Φ-Funktionen hinter L nicht vertauscht sind. Die Kraft zwischen gleichen Teilchen ist also bei diesem Ansatz für H_β keine Austauschkraft. Dagegen ergibt sich Vertauschung der Ortskoordinaten bei dem auf S. 192 besprochenen Ansatz, der aus (38.5) durch Vertauschung von Φ mit φ entsteht. Damit wird der Absättigungscharakter der Kraft zwischen gleichen Teilchen an eine Bedingung über die Spinabhängigkeit der Proton-Neutron-Kraft geknüpft. Diese Tatsache ist für die Theorie der schwereren Kerne wichtig (§ 16).

Wir versuchen, die Größenordnung dieser Kraft zwischen zwei Neutronen und der ebenso großen zwischen zwei Protonen abzuschätzen. Man würde zunächst vermuten, daß sie sehr viel kleiner wäre als die Kraft zwischen Proton und Neutron, da sie erst in einer höheren Näherung auftritt. Dem entspricht, daß sie bei großem r wie $1/r^9$ abfällt. Aber wir haben oben gesehen, daß der entscheidende Beitrag zur Neutron-Proton-Kraft eben von den Abständen herrührt, in denen die Näherungsrechnung versagt. Dort können die beiden Kräfte durchaus dieselbe Größenordnung haben. Wir führen die komplizierte Auswertung des gesamten Ausdrucks (41.13) hier nicht durch, sondern geben nur die folgende Größenordnungsabschätzung auf Grund des in (41.14—16) angeschriebenen Gliedes. Der Wert von $K(r)$ bei $r = 0$ ist

$$K(r = 0) = \frac{g^4}{180 \pi^8 c^3 \hbar^{12} \alpha^9}. \tag{41.17}$$

Dies ist zu vergleichen mit $J(r = 0)$ nach (41.12). Da in die Berechnung von J der Beitrag der beiden, durch (41.2) und (41.3) charakterisierten Prozesse eingeht, müßten wir dabei auch für K die in (41.13) nicht angeschriebenen Glieder berücksichtigen. Es gibt drei zum angeschriebenen

analoge Glieder, und wenn wir die außerdem vorhandenen Glieder, in denen nur die Elektronen oder nur die Neutrinos ausgetauscht werden (und die andern leichten Teilchen von demselben schweren Teilchen, das sie emittiert hat, wieder absorbiert werden), als Wechselwirkungsterme mit der Selbstenergie der schweren Teilchen für diese Größenordnungsabschätzung fortlassen, müssen wir also $4K$ mit J vergleichen. Es ergibt sich

$$\left(\frac{4K}{J}\right)_{r=0} = \frac{g^2}{18\pi^4 c^2 \hbar^6 \alpha^4}. \tag{41.18}$$

Zur Abschätzung dieser Größe setzen wir $J(r=0) = \xi mc^2$ und $\hbar\alpha = \eta e^2/mc^2$; nach § 15 wird dabei $\xi \approx 100$ und $\eta \approx 1/2$ zu setzen sein. Aus (41.12) folgt

$$g^2 = \frac{5\pi^4}{2}\xi\eta^5 \frac{\hbar c}{e^2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^6 (mc^2)^2, \tag{41.19}$$

und damit wird

$$\left(\frac{4K}{J}\right)_{r=0} = \frac{5}{36}\xi\eta\frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{20}. \tag{41.20}$$

Man sieht hieraus, daß die beiden potentiellen Energien tatsächlich dieselbe Größenordnung haben; der Faktor $1/20$, der an sich zu den Überlegungen von § 15—16 gut passen würde, ist natürlich bei der Unsicherheit des Ansatzes und der Ungenauigkeit der Abschätzung nicht zu garantieren.

Wir schließen mit dem Hinweis darauf, daß die Möglichkeit des β-Zerfalls auch die magnetischen Momente der schweren Teilchen beeinflußt. Anschaulich läßt sich dies darauf zurückführen, daß z. B. auch ein stabiles Neutron gewissermaßen virtuell mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit in ein Proton, Elektron und Antineutrino zerlegt ist und in diesem Zustand das magnetische Moment dieser Teilchenkombination, also im wesentlichen das Bohrsche Magneton besitzt. Eine Berechnung des Zusatzmoments läßt sich durchführen, wenn man die Bewegung eines Neutrons unter gleichzeitiger Wirkung des Feldes der leichten Teilchen (H_β) und eines elektromagnetischen Feldes (H_e) behandelt:

$$\left\{H_0 + H_\beta + H_e - \hbar i \frac{\partial}{\partial t}\right\}\chi = 0. \tag{41.21}$$

Es kann dann folgender Prozeß stattfinden: 1. Das Neutron verwandelt sich in Proton, Elektron und Antineutrino. 2. Das Elektron macht im äußeren Feld einen Übergang. 3. Die drei Teilchen verwandeln sich in ein Neutron zurück. Die durch 1. und 3. allein verursachte Zusatzenergie ist genau die Selbstenergie des Neutrons; die Möglichkeit des dazwischengeschobenen Prozesses 2. bewirkt also eine Änderung der Selbstenergie

durch die Anwesenheit des äußeren Feldes. Rechnet man genau wie im Problem der Austauschkraft, so erhält man ein Zusatzglied zur Energie

$$H_{\beta e \beta} = \mu \sum_{\varrho \varrho'} \int d\mathfrak{r} \Phi_l^*(\mathfrak{r}\varrho)(\vec{\sigma}_{\varrho\varrho'}, \mathfrak{H}) \Phi_l(\mathfrak{r}\varrho'). \tag{41.22}$$

Dies ist die Wechselwirkungsenergie eines Teilchens vom magnetischen Moment μ mit dem äußeren Magnetfeld $\mathfrak{H}$. Für μ folgt

$$\mu = \frac{e g^2}{40 \pi^4 c^2 \hbar^5 \alpha^3}; \tag{41.23}$$

wählt man statt (38. 5) den Ansatz, bei dem Φ und φ vertauscht sind, so ergibt sich noch ein Faktor $^3/_2$. Setzt man für g und α nach (41.19) ein, so folgt

$$\mu = \frac{\xi \eta^2}{8} \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \frac{e\hbar}{2mc}. \tag{41.24}$$

Das Moment wäre demnach etwa um den Faktor $3/137^2 \approx 1/6000$ kleiner als das Bohrsche Magneton. Empirisch hat das Neutron etwa $^1/_{1000}$ des Bohrschen Magnetons. Eine bessere numerische Übereinstimmung läßt sich angesichts der Willkür in unserer Abschätzung nicht erwarten.

Zu einer quantitativ prüfbaren Konsequenz führt die Tatsache, daß das Proton, das die Möglichkeit hat, sich in Neutron, Positron und Neutrino zu zerlegen, ein Zusatzmoment erhalten muß, das numerisch gleich dem Moment des Neutrons ist, aber wegen des umgekehrten Ladungsvorzeichens des virtuell emittierten Elektrons bei gleichem mechanischem Moment die entgegengesetzte Richtung hat. Im Grundzustand des Deuterons, in dem die Spins des Protons und des Neutrons parallel gerichtet sind, sollten sich ihre aus der Möglichkeit des β-Zerfalls folgenden Zusatzmomente daher gerade aufheben; d. h. das Deuteron sollte genau das aus der Diracschen Theorie für das Proton folgende Moment μ_K haben. Der gemessene Wert liegt etwas tiefer ($\sim 0{,}75\, \mu_K$). Qualitative Übereinstimmung ist also vorhanden. Ob die quantitative Abweichung eine Grenze der hier verwendeten Vorstellungen andeutet oder ob die Wechselwirkung zwischen den Ladungen der Teilchen im Zwischenzustand (die ja beim Proton anders ist als beim Neutron) zur Erklärung der Abweichung ausreicht, ist noch nicht quantitativ untersucht worden.

Anhang

I. Berücksichtigung des Pauliprinzips in der Hartreeschen Annäherung

Im zweiten Abschnitt des zweiten Kapitels wurde für die Eigenfunktion eines aus Z Protonen und N Neutronen bestehenden Kerns der Produktansatz

$$\Psi(p_1 p_2 \ldots p_Z, n_1 n_2 \ldots n_N) = \psi_1(p_1) \ldots \psi_Z(p_Z) \varphi_1(n_1) \ldots \varphi_N(n_N) \quad \text{(I.1)}$$

gemacht. Dieser Ansatz widerspricht der Forderung des Pauliprinzips, daß die Eigenfunktion antisymmetrisch in den Koordinaten gleichartiger Teilchen sein solle. Man erhält aus (I.1) eine antisymmetrische Funktion, wenn man die Summe aller der Eigenfunktionen bildet, die aus Ψ durch alle möglichen Permutationen der Koordinaten der Protonen untereinander und der Neutronen untereinander entstehen, und dabei alle durch gerade Permutation entstehenden Eigenfunktionen mit dem positiven Zeichen versieht, alle durch ungerade Permutation entstehenden mit dem negativen; waren die Ausgangseigenfunktionen normiert, so hat man außerdem noch durch die Wurzel aus der Anzahl der möglichen Permutationen zu dividieren, um wieder normierte Eigenfunktionen zu erhalten:

$$\Phi(p_1 p_2 \ldots p_Z, n_1 n_2 \ldots n_N) = \frac{1}{\sqrt{Z!\,N!}} \sum_{iklm} \pm P_{(p_i p_k)} P_{(n_l n_m)} \Psi. \quad \text{(I.2)}$$

Am übersichtlichsten schreibt man Φ als Produkt von Determinaten der ψ und φ:

$$\Phi = \begin{vmatrix} \psi_1(p_1) & \psi_1(p_2) & \ldots & \psi_1(p_Z) \\ \psi_2(p_1) & \psi_2(p_2) & \ldots & \psi_2(p_Z) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_Z(p_1) & \psi_Z(p_2) & \ldots & \psi_Z(p_Z) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_1(n_1) & \varphi_1(n_2) & \ldots & \varphi_1(n_N) \\ \varphi_2(n_1) & \varphi_2(n_2) & \ldots & \varphi_2(n_N) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_N(n_1) & \varphi_N(n_2) & \ldots & \varphi_N(n_N) \end{vmatrix}. \quad \text{(I.3)}$$

Wir zeigen nun, daß aus diesem Ansatz der Eigenfunktion die Formeln (14.17) für die Austauschenergie und (16.14) für die Coulombenergie folgen.

a) Austauschenergie. Die Symbole p_l bzw. n_m fassen jeweils Orts- und Spinvariable $\mathfrak{r}_{p_l}$, ϱ_{p_l} bzw. $\mathfrak{r}_{n_m}$, ϱ_{n_m} zusammen; daher stehe das Symbol $\int dp_l$ bzw. $\int dn_m$ für die Integration über das betreffende $\mathfrak{r}$ und die Summation über das betreffende ϱ gleichzeitig. Das Symbol $K(p_l n_m)$ bezeichne den Operator der Austauschenergie, also $J(\mathfrak{r}_{p_l} - \mathfrak{r}_{n_m})$, multipliziert mit dem Permutationsoperator, der im Ansatz I p_l mit n_m, im Ansatz II nur $\mathfrak{r}_{p_l}$ mit $\mathfrak{r}_{n_m}$ vertauscht. Die potentielle Energie der Austauschkraft, summiert über alle möglichen Kombinationen eines Protons mit einem Neutron, ist dann

$$E_{\mathrm{pot}} = \int \Phi^* \sum_{lm} K(p_l n_m) \Phi \, dp_1 \ldots dp_Z \, dn_1 \ldots dn_N \,. \tag{I.4}$$

In dieser Formel steht eine dreifache Summe über die Koordinaten aller Protonen und aller Neutronen: die angeschriebene und die in Φ^* und Φ enthaltenen. Diese Summe reduziert sich zunächst dadurch auf eine doppelte, daß wegen der Orthogonalität der ψ und der φ alle Produkte bei der Integration verschwinden, bei denen in Φ^* und Φ nicht dieselbe Permutation gewählt ist. In jedem der übrigbleibenden $Z!N!$ Summenglieder kann man, wenn man ein bestimmtes l und m herausgreift, die Integration über alle von p_l und n_m verschiedenen Koordinaten ausführen und erhält wegen der Normierung Eins. Wäre $K(p_l n_m) = 1$, so würden auch die beiden restlichen Integrationen Eins liefern und jedes einzelne der $Z!N!$ Summenglieder wäre gleich $1/Z!N!$, womit gezeigt ist, daß das Normierungsintegral von Φ tatsächlich gleich Eins ist. In Wirklichkeit sind nur jeweils diejenigen $(Z-1)!(N-1)!$ Summenglieder einander gleich, in denen dieselben Eigenfunktionen $\psi_i(p_l)\,\varphi_k(n_m)$ stehen und nur die Argumente der übrigen Eigenfunktionen beliebig permutiert sind. Summiert man über diese Glieder und beachtet, daß es nach (I.3) gleichgültig ist, ob man in (I.2) die Permutation auf die Indizes der Koordinaten oder der Eigenfunktionen ausgeübt denkt, so kann man einfach schreiben

$$\left. \begin{aligned} & E_{\mathrm{pot}} = \\ & \qquad \frac{(Z-1)!\,(N-1)!}{Z!\,N!} \sum_{ik} \sum_{lm} \int \psi_i^*(p_l)\,\varphi_k^*(n_m)\,K(p_l n_m)\,\psi_i(p_l)\,\varphi_k(n_m)\,dp_l\,dn_m \,. \end{aligned} \right\} \tag{I.5}$$

Hierin sind nun alle Glieder der Summe über l und m gleich; sie unterscheiden sich nur durch den Namen der Integrationsvariablen. Damit folgt

$$E_{\mathrm{pct}} = \sum_{ik} \int \psi_i^*(p)\,\varphi_k^*(n)\,K(pn)\,\psi_i(p)\,\varphi_k(n)\,dp\,dn \,, \tag{I.6}$$

was bei Einsetzung der Bedeutung von p, n und K mit (14.17) identisch ist.

b) Coulombenergie. Die COULOMBsche Abstoßungsenergie der Protonen lautet

$$E_C = \frac{e^2}{2}\int \Phi^* \sum_{k \neq k'} \frac{1}{|\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}_{k'}|} \Phi dp_1 \ldots dp_Z dn_1 \ldots dn_N, \qquad (I.7)$$

wobei die Summe über k und k' jeweils über alle Protonen läuft. Der Faktor $1/2$ mußte hinzugefügt werden, weil bei dieser Art der Summation jedes Protonenpaar zweimal gezählt wird. Über die Neutronenkoordinaten können wir integrieren, ebenso über alle Protonenkoordinaten außer p_n und p_l. Für diese beiden Koordinaten verschwindet nun aber das Integral über das Glied, in dem p_k und $p_{k'}$ in Φ vertauscht sind gegen Φ^*, nicht, da außer den orthogonalen Eigenfunktionen noch $1/|\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}_{k'}|$ unter dem Integral steht; man erhält also zwei Glieder, und zwar nach (I.2) das zweite mit negativem Vorzeichen. Analog zu (I.6) ergibt sich

$$E_C = \frac{e^2}{2}\int dp \int dp' \sum_{k \neq k'} \left\{ \frac{\psi_k^*(p)\psi_{k'}^*(p')\psi_k(p)\psi_{k'}(p')}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} - \frac{\psi_k^*(p)\psi_{k'}^*(p')\psi_k(p')\psi_{k'}(p)}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|} \right\}. \qquad (I.8)$$

Die Summe über k und k' ließe sich leichter umformen, wenn die Einschränkung $k \neq k'$ nicht bestände. Man kann aber die beiden Summenglieder für $k = k'$ einfach zu (I.8) hinzufügen; da sich die erste und die zweite Summe nur für $k \neq k'$ voneinander unterscheiden, heben sich die beiden Glieder gegeneinander fort und der Wert von E_C wird dadurch nicht geändert.

Berücksichtigt man nun, daß $\int dp$ für $\int dN \sum_\varrho$ steht, so erkennt man unmittelbar, daß wegen

$$\sum_\varrho \sum_k \psi_k^*(\mathfrak{r}\varrho)\psi_k(\mathfrak{r}\varrho) = \varrho(\mathfrak{r}) \qquad (I.9)$$

die erste Summe einfach das Produkt der Dichten an den Punkten $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ liefert. Um die zweite Summe auszuwerten, müssen wir wie in (14.18) den Ansatz

$$\psi_k(\mathfrak{r}\varrho) = \chi_i(\mathfrak{r})\, a_l(\varrho) \qquad (I.10)$$

machen. Der Index k faßt die Numerierung der Ortseigenfunktionen i und der zu jeder von ihnen gehörigen zwei Spinzustände l zusammen. Nun ist

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\varrho\varrho'} \sum_{kk'} \psi_k^*(\mathfrak{r}\varrho)\psi_{k'}^*(\mathfrak{r}'\varrho')\psi_k(\mathfrak{r}'\varrho')\psi_{k'}(\mathfrak{r}\varrho) \\ &\quad = \sum_{ii'} \chi_i^*(\mathfrak{r})\chi_{i'}^*(\mathfrak{r}')\chi_i(\mathfrak{r}')\chi_{i'}(\mathfrak{r}) \sum_{\varrho\varrho'} \sum_{l,l'=1,2} a_l^*(\varrho)a_{l'}^*(\varrho')a_l(\varrho')a_{l'}(\varrho)\,. \end{aligned}\right\} \qquad (I.11)$$

Die Summe über die Spinzustände und -koordinaten liefert

$$\sum_{\varrho\varrho'}\sum_{l=1,2} a_l^*(\varrho)a_l(\varrho')\sum_{l'=1,2} a_{l'}^*(\varrho')a_{l'}(\varrho) = \sum_{\varrho\varrho'}\delta_{\varrho\varrho'}\delta_{\varrho'\varrho} = 2\ ; \tag{I.12}$$

andererseits ist nach (14.19), wo die Summe über die Spinzustände in genau derselben Weise wie hier ausgeführt ist,

$$\sum_i \chi_i^*(\mathfrak{r})\chi_i(\mathfrak{r}') = \tfrac{1}{2}\varrho(\mathfrak{r}\mathfrak{r}')\ , \tag{I.13}$$

und so folgt im ganzen

$$E_C = \frac{e^2}{2}\int\frac{d\mathfrak{r}\,d\mathfrak{r}'}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|}\left(\varrho(\mathfrak{r})\varrho(\mathfrak{r}') - \tfrac{1}{2}|\varrho(\mathfrak{r}\mathfrak{r}')|^2\right)\ , \tag{I.14}$$

was mit (16.14) identisch ist.

II. Diracs Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit zwischen Zuständen gleicher Energie

Nach (39.9) ist die Anregungsamplitude eines Zustandes, der sich vom Ausgangszustand um den Energiebetrag $E = E_k - E_l + E_s + E_t$ unterscheidet, durch

$$c_1 = -\overline{H}\cdot\frac{e^{\frac{i}{\hbar}Et}-1}{E} \tag{II.1}$$

gegeben. $\overline{H}$ ist das zu dem Übergang gehörige Matrixelement. Dieselbe Formel würde sich in dem in § 28, S. 132 behandelten Problem des Übergangs eines gebundenen Neutrons in den freien Zustand ergeben. Nach dieser Formel sind zunächst Übergänge in Zustände beliebiger Energie möglich; ihre Intensität ist (mit der Abkürzung $E/\hbar = \omega$)

$$c_1^* c_1 = \frac{|\overline{H}|^2}{\hbar^2}\frac{(e^{-i\omega t}-1)(e^{i\omega t}-1)}{\omega^2} = \frac{4\,|\overline{H}|^2}{\hbar^2}\frac{\sin^2\omega t/2}{\omega^2}\,. \tag{II.2}$$

Diese Größe wächst quadratisch mit der Zeit an, solange $\frac{\omega t}{2}$ klein bleibt gegen eins, also um so länger, je kleiner ω ist. Schließlich bleibt sie aber unter der Grenze $4|\overline{H}|^2/\hbar^2\omega^2$. Nach Verlauf der Zeit t ist also die Anregungsintensität des Zustandes, als Funktion von ω betrachtet, in einem Intervall $|\omega| \ll \frac{1}{t}$ von der relativen Größenordnung t^2, außerhalb von der relativen Größenordnung $\frac{1}{\omega^2}$. Integriert man über das Gebiet innerhalb

und außerhalb der Grenze $\frac{\omega t}{2} = 1$, so erhält man innen $\sim t^2 \cdot \frac{1}{t}$, d. h. eine zu t proportionale Größe, außen, da das Integral über $\frac{1}{\omega^2}$ konvergiert, eine Konstante. Andererseits kann nach der Unbestimmtheitsrelation E in der Zeitspanne t gar nicht genauer als bis auf $\hbar/t$, d. h. ω nicht genauer als bis auf $1/t$ bestimmt werden. Unser Ergebnis ist also genau das quantenkinematisch erwartete: Die totale Anregungsstärke aller der Zustände, deren Energie innerhalb der durch die endliche Beobachtungszeit gesetzten Schranke mit dem gesuchten, durch den Energiesatz geforderten Wert identisch ist, wächst linear mit der Zeit an; die Breite des Energieintervalls, das dabei berücksichtigt werden muß, nimmt linear mit der Zeit ab. Man kann daher die beobachtete Anregungsstärke des Endzustands aus (II.2) erhalten, wenn man über alle Endenergien summiert. Man wird die Summe als Integral ausführen und darf dabei als mittleren Abstand der Energieniveaus $\varDelta E = \hbar \varDelta \omega$ denjenigen wählen, der an der Stelle $E = 0$ gilt, da nur diese schließlich einen wesentlichen Beitrag liefert. Man erhält

$$\sum_{\omega} c_1^* c_1 = \int c_1^* c_1 \frac{d\omega}{\varDelta\omega} = \frac{2\pi\,|\overline{H}|^2 t}{\hbar^2 \varDelta\omega} = \frac{2\pi\,|\overline{H}|^2}{\hbar \varDelta E} \cdot t\,, \tag{II.3}$$

was mit (39.10) identisch ist. (28.32) unterscheidet sich von (II.3) um einen Faktor 2, da $\varGamma_s$ als $|cs|^2/2t$ definiert ist.

Tabelle 10

Naturkonstanten

$e = 4{,}77 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. Elektrische Elementarladung
$h = 6{,}547 \cdot 10^{-27}$ ergsec PLANCKsches Wirkungsquantum
$\hbar = 1{,}042 \cdot 10^{-27}$ ergsec $= h/2\pi$
$c = 2{,}998 \cdot 10^{10}$ cm/sec Lichtgeschwindigkeit
$m = 9{,}02 \cdot 10^{-28}$ g Ruhmasse des Elektrons
$M = 1{,}66 \cdot 10^{-24}$ g Ruhmasse des Protons
$\hbar c/e^2 = 137{,}3$
$M/m = 1840$

Tabelle 11

Maßeinheiten

Energie: 1 Million Elektronenvolt (M.e.V.) $= 1{,}59 \cdot 10^{-6}$ erg
Ruhenergie des Elektrons $= mc^2 = 0{,}51$ M.e.V.
$^1/_{1000}$ Masseneinheit (M.E.) $= 10^{-3} \cdot M(^{16}_{8}\mathrm{O}) \cdot c^2/16 = 0{,}928$ M.e.V.
Länge: Klassischer Elektronenradius $= e^2/mc^2 = 2{,}80 \cdot 10^{-13}$ cm

Tabelle 12. Isotopentafel[1])

Element	Z	N	A	Masse	Relative Häufigkeit in %	Radioaktivität Typ	Radioaktivität Halbwertszeit
n	0	1	1	1,0090	—	?	
H	1	0	1	1,0081	99,98	—	
		1	2	2,0147	0,02	—	
		2	3	3,0171	$< 10^{-7}$	—	
He.....	2	1	3	3,0171	—	?	
		2	4	4,0039	100	—	
Li	3	3	6	6,0167	7,9	—	
		4	7	7,0180	92,1	—	
		5	8	^{8}Be + 0,01	—	β^-	0,5 sec
Be.....	4	4	8	8,0078	?	?	
		5	9	9,0149	~ 100	—	
		6	10	10,0164	—	?	
B	5	5	10	10,0161	20,6	—	
		6	11	11,0128	79,4	—	
		7	12	^{12}C + 0,012	—	β^-	0,02 sec
C	6	5	11	^{11}B + 0,0016	—	β^+	21 min
		6	12	12,0036	99,0	—	
		7	13	13,0073	~ 1	—	
N......	7	6	13	^{13}C + 0,002	—	β^+	11 min
		7	14	14,0073	99,7	—	
		8	15	15,0048	0,3	—	
		9	16	^{16}O + 0,007	—	β^-	10 sec
O	8	7	15	^{15}N + 0,0022	—	β^+	2,1 min
		8	16	16,0000	99,8	—	
		9	17	17,0046	0,03	—	
		10	18	18,0065	0,16	—	
		11	19		—	β^-	8 sec
F......	9	8	17	^{17}O + 0,0026	—	β^+	1,2 min
		10	19	19,0045	100	—	
		11	20	^{20}Ne + 0,0055	—	β^-	12 sec
Ne	10	10	20	19,9967	90,0	—	
		11	21		0,27	—	
		12	22	21,9947	9,73	—	
		13	23		—	β^-	40 sec
Na.....	11	12	23		100	—	
		13	24		—	β^-	15,5 h
Mg.....	12	12	24		78	—	
		13	25		11	—	
		14	26		11	—	
		15	27		—	β^-	10,25 min
Al	13	13	26		—	β^+	7 sec
		14	27		100	—	
		15	28		—	β^-	2,6 min
		16	29		—	β^-	~ 11 min

[1]) Daten für die leichten Kerne nach M. L. E. OLIPHANT (74), für die schwereren in der Hauptsache nach J. MATTAUCH (69) und O. HAHN (47a). Künstlich radioaktive Kerne sind aufgenommen, soweit eine sichere Zuordnung zu einem bestimmten Atomgewicht möglich ist.

Tabelle 12 (Fortsetzung)

Element	Z	N	A	Masse	Relative Häufigkeit in %	Radioaktivität	
						Typ	Halbwertszeit
Si	14	13	27		—	β^+	~ 6 min
		14	28	27,9818	89,6	—	
		15	29		6,2	—	
		16	30		4,2	—	
		17	31		—	β^-	~ 2,7 h
P......	15	15	30		—	β^+	3,25 min
		16	31	30,9825	100	—	
		17	32		—	β^-	~ 14,5 d
S	16	16	32		97	—	
		17	33		0,8	—	
		18	34		2,2	—	
Cl	17	17	34		—	β^+	~ 40 min
		18	35	34,983	75	—	
		19	36		—	β^-	~ 40 min
		20	37	36,980	25	—	
		21	38		—	β^-	~ 37 min
A	18	18	36	35,976	0,33	—	
		20	38		0,05	—	
		22	40	39,971	99,62	—	
		23	41		—	β^-	1,4 h
K	19	20	39		93,4	—	
		21	40		0,01	β^-	~ 10^7 Jahre
		22	41		6,6	—	
		23	42		—	β^-	16 h
Ca	20	20	40		96,76	—	
		22	42		0,77	—	
		23	43		0,17	—	
		24	44		2,30	—	
Sc	21	23	44		—	β^+	3 h
		24	45		100	—	
Ti	22	24	46		8,5	—	
		25	47		7,8	—	
		26	48		78,3	—	
		27	49		5,5	—	
		28	50		6,9	—	
V	23	28	51		100	—	
		29	52		—	β^-	3,75 min
Cr	24	26	50		4,9	—	
		28	52	51,948	81,6	—	
		29	53		10,4	—	
		30	54		3,1	—	
Mn	25	30	55		100	—	
		31	56		—	β^-	2,5 h
Fe	26	28	54		6,5	—	
		30	56		90,7	—	
		31	57		2,8	—	
Co ...	27	32	59		100	—	
Ni	28	30	58	57,942	67,5	—	
		32	60		27,0	—	
		33	61		1,7	—	
		34	62		3,8	—	

Tabelle 12 (Fortsetzung)

Element	Z	N	A	Masse	Relative Häufigkeit in %	Radioaktivität	
						Typ	Halbwertszeit
Cu	29	34	63		70	—	
		35	64		—	β^-	10 h
		36	65		30	—	
		37	66		—	β^-	5 min
Zn	30	34	64	63,937	50,4	—	
		36	66		27,2	—	
		37	67		4,2	—	
		38	68		17,8	—	
		40	70		0,4	—	
Ga	31	38	69		61,5	—	
		40	71		38,5	—	
Ge	32	38	70		21,2	—	
		40	72		27,3	—	
		41	73		7,9	—	
		42	74		37,1	—	
		44	76		6,5	—	
As	33	42	75	74,934	100	—	
		43	76		—	β^-	26 h
Se	34	40	74		0,9	—	
		42	76		9,5	—	
		43	77		8,3	—	
		44	78	77,937	24,0	—	
		46	80	79,941	48,0	—	
		48	82		9,3	—	
Br	35	44	79	78,929	50,0	—	
		46	81	80,926	50,0	—	
Kr	36	42	78	77,926	0,42	—	
		44	80	79,926	2,45	—	
		46	82	81,927	11,79	—	
		47	83	82,927	11,79	—	
		48	84	83,928	56,85	—	
		50	86	85,929	16,70	—	
Rb	37	48	85		72,7	—	
		50	87		27,3	β^-	$\sim 10^9$ Jahre
Sr	38	48	86		10	—	
		49	87		6,6	—	
		50	88		83,4	—	
Y	39	50	89		100	—	
Zr	40	50	90		48	—	
		51	91		11,5	—	
		52	92		22	—	
		54	94		17	—	
		56	96		1,5	—	
Nb	41	52	93	92,926	100	—	
Mo	42	50	92		14,2	—	
		52	94		10,0	—	
		53	95		15,5	—	
		54	96		17,8	—	
		55	97		9,6	—	
		56	98	97,946	23,0	—	
		58	100	99,945	9,8	—	

Tabelle 12 (Fortsetzung)

Element	Z	N	A	Masse	Relative Häufigkeit in %	Radioaktivität	
						Typ	Halbwertszeit
Ru	44	52	96		5	—	
		54	98 ?		—	—	
		55	99		12	—	
		56	100		14	—	
		57	101		22	—	
		58	102		30	—	
		60	104		17	—	
Rh	45	58	103		100	—	
Pd	46	56	102		Selten	—	
		58	104		Häufig	—	
		59	105		Häufig	—	
		60	106		Häufig	—	
		62	108		Häufig	—	
		64	110		Zieml. selten	—	
Ag	47	60	107		52,5	—	
		62	109		47,5	—	
Cd	48	58	106		1,5	—	
		60	108		1,0	—	
		62	110		15,2	—	
		63	111		15,2	—	
		64	112		21,8	—	
		65	113		14,9	—	
		66	114		23,7	—	
		67	115		0,8	—	
		68	116		5,9	—	
		70	118 ?		—	—	
In	49	64	113		4,5	—	
		66	115		95,5	—	
Sn	50	62	112		1,07	—	
		64	114		0,74	—	
		65	115		0,44	—	
		66	116		14,19	—	
		67	117		9,81	—	
		68	118		21,48	—	
		69	119		11,02	—	
		70	120	119,912	27,04	—	
		71	121		2,96	—	
		72	122		5,03	—	
		74	124		6,19	—	
Sb	51	70	121		56	—	
		72	123		44	—	
Te	52	70	122		2,9	—	
		71	123		1,6	—	
		72	124		4,5	—	
		73	125		6,0	—	
		74	126		19,0	—	
		75	127 ?		—	—	
		76	128		32,8	—	
		78	130		33,1	—	
J	53	74	127	126,932	100	—	
		75	128		—	β^-	25 m

Tabelle 12 (Fortsetzung)

Element	Z	N	A	Masse	Relative Häufigkeit in %	Radioaktivität	
						Typ	Halbwertszeit
X	54	70	124		0,08	—	
		72	126		0,08	—	
		74	128		2,30	—	
		75	129		27,13	—	
		76	130		4,18	—	
		77	131		20,67	—	
		78	132		26,45	—	
		80	134	133,929	10,31	—	
		82	136		8,79	—	
Cs	55	78	133	132,933	100	—	
Ba	56	79	135		5,9	—	
		80	136		8,9	—	
		81	137		11,1	—	
		82	138	137,916	74,1	—	
La	57	82	139		100	—	
Ce	58	82	140		89	—	
		84	142		11	—	
Pr	59	82	141		100	—	
Nd	60	82	142		36	—	
		83	143		11	—	
		84	144		30	—	
		85	145		5	β^- ?	$\sim 10^9$ Jahre ?
		86	146		18	—	
Sm	62	82	144		3	—	
		85	147		17	—	
		86	148		14	—	
		87	149		15	—	
		88	150		5	α ?	$\sim 10^9$ Jahre ?
		90	152		26	—	
		92	154		20	—	
Eu	63	88	151		50,6	—	
		90	153		49,4	—	
Gd	64	91	155		21	—	
		92	156		23	—	
		93	157		17	—	
		94	158		23	—	
		96	160		16	—	
Tb	65	94	159		100	—	
Dy	66	95	161		22	—	
		96	162		25	—	
		97	163		25	—	
		98	164		28	—	
Ho	67	98	165		100	—	
Er	68	98	166		36	—	
		99	167		24	—	
		100	168		30	—	
		102	170		10	—	
Tm	69	100	169		100	—	
Yb	70	101	171		9	—	
		102	172		24	—	
		103	173		17	—	

Tabelle 12 (Fortsetzung)

Element	Z	N	A	Masse	Relative Häufigkeit in %	Radioaktivität	
						Typ	Halbwertszeit
Yb.....	70	104	174		38	—	
		106	176		12	—	
Cp.....	71	104	175		100	—	
Hf.....	72	104	176		5	—	
		105	177		19	—	
		106	178		28	—	
		107	179		18	—	
		108	180		30	—	
Ta.....	73	108	181	180,928	100	—	
W.....	74	108	182		22,6	—	
		109	183		17,3	—	
		110	184	184,0	30,2	—	
		112	186		29,9	—	
Re	75	110	185		38,2	—	
		112	187	186,981	61,8	—	
Os	76	110	186		1,0	—	
		111	187		0,6	—	
		112	188		13,4	—	
		113	189		17,4	—	
		114	190	189,98	25,1	—	
		116	192	191,98	42,5	—	
Ir	77	114	191		33	—	
		116	193		67	—	
Pt.....	78	114	192		Selten	—	
		116	194		~ 38	—	
		117	195		~ 38	—	
		118	196		~ 24	—	
		120	198		Selten	—	
Au.....	79	118	197		100	—	
Hg	80	116	196		0,10	—	
		117	197?		—	—	
		118	198		9,89	—	
		119	199		16,45	—	
		120	200	200,016	23,77	—	
		121	201		13,67	—	
		122	202		29,27	—	
		123	203?		—	—	
		124	204		6,85	—	
Tl.....	81	122	203	203,037	29,4	—	
		124	205	205,037	70,6	—	
AcC″ ..	81	126	207			β^-	4,76 min
ThC″ ..	81	127	208			β^-	3,16 min
RaC″ ..	81	129	210			β^-	1,32 min
Pb	82	122	204		1,52	—	
		124	206		28,03	—	
		125	207		20,40	—	
		126	208	208,010	50,05	—	
RaD ..	82	128	210			β^-	22 Jahre
AcB ...	82	129	211			β^-	36 min
ThB ...	82	130	212			β^-	10,6 h
RaB ...	82	132	214			β^-	26,8 min
Bi.....	83	126	209		100	—	

Tabelle 12 (Fortsetzung)

Element	Z	N	A	Masse	Relative Häufigkeit in %	Radioaktivität	
						Typ	Halbwertszeit
RaE ...	83	127	210			β^-	5,0 Tage
AcC....	83	128	211			99,68% α; 0,32% β^-	2,16 min
ThC ...	83	129	212			35% α; 65% β^-	61 min
RaC ...	83	131	214			0,04% α; 99,96% β^-	19,7 min
Po.....	84	126	210			α	137 Tage
AcC′...	84	127	211			α	$\sim 5 \cdot 10^{-3}$ sec
ThC′ ..	84	128	212			α	$\sim 10^{-9}$ sec
RaC′...	84	130	214			α	$\sim 1{,}7 \cdot 10^{-6}$ sec
AcA ...	84	131	215			α	$2 \cdot 10^{-3}$ sec
ThA ...	84	132	216			α	0,14 sec
RaA ...	84	134	218			α	3,05 min
AcEm .	86	133	219			α	3,92 sec
ThEm..	86	134	220			α	54,6 sec
RaEm .	86	136	222			α	3,82 Tage
AcX ...	88	135	223			α	11,3 Tage
ThX ..	88	136	224			α	3,6 Tage
Ra.....	88	138	226			α	1590 Jahre
$MsTh_1$.	88	140	228			β^-	6,7 Jahre
Ac.....	89	138	227			β^-	13,5 Jahre
$MsTh_2$.	89	139	228			β^-	6,14 h
RaAc ..	90	137	227			α	19,0 Tage
RaTh ..	90	138	228			α	1,90 Jahre
Jo	90	140	230			α	$8{,}3 \cdot 10^{4}$ Jahre
Th	90	142	232			α	$1{,}7 \cdot 10^{10}$ Jahre
UX_1 ...	90	144	234			β^-	24,5 Tage
Pa.....	91	140	231			α	$3{,}2 \cdot 10^{4}$ Jahre
UX_2 ...	91	143	234			β^-	70 sec
UII....	92	142	234			α	$3 \cdot 10^{5}$ Jahre
AcU ...	92	143	235		< 1	α	
UI	92	146	238		> 99	α	$4{,}6 \cdot 10^{9}$ Jahre

Schrifttum

1. A. J. ALICHANOW, A. J. ALICHANIAN, B. S. DZELEPOW, Nature **136** (1935) 257.
2. A. J. ALICHANOW, A. J. ALICHANIAN, B. S. DZELEPOW, Nature **137** (1936) 314.
3. E. AMALDI, O. D'AGOSTINO, E. FERMI, B. PONTECORVO, F. RASETTI, E. SEGRÈ, Proc. Roy. Soc. London (A) **149** (1935) 522.
4. AMBROSEN, Z. Physik **91** (1934) 43.
5. F. W. ASTON, Mass-Spectra and Isotopes. London 1933.
6. R. d'E. ATKINSON, Astroph. J. **73** (1931) 250, 308.
7. R. d'E. ATKINSON u. F. HOUTERMANS, Z. Physik **54** (1930) 656.
8. G. BECK, K. SITTE, Z. Physik **86** (1933) 105.
9. H. A. BETHE, R. PEIERLS, Proc. Roy. Soc. London (A) **148** (1935) 146.
10. H. A. BETHE, Physic. Rev. **47** (1935) 747.
11. H. A. BETHE, R. PEIERLS, Londoner Kongreß 1934, Diskussionsbemerkung H. A. BETHE.

11a. H. A. BETHE u. R. F. BACHER, Rev. mod. Physics **8** (1936) 82.

12. N. BOHR, vgl. Festnummer von Fysisk Tidsskrift, Oktober 1935, Artikel von U. F. KALCKAR.
13. N. BOHR, Nature **137** (1936) 344.
14. N. BOHR, Convegno di Fisica Nucleare. Rom 1933.
15. W. BOTHE, Z. Physik **100** (1936) 273.
16. G. BREIT, D. P. JOHNSON, N. OSTROFSKY, Physic. Rev. **49** (1936) 22.
17. G. BREIT, E. WIGNER, Physic Rev. **49** (1936) 519.
18. G. BREIT, F. L. YOST, Physic. Rev. **48** (1935) 203.
19. J. CHADWICK, J. E. R. CONSTABLE, E. C. POLLARD, Proc. Roy. Soc. London (A) **130** (1930) 463.
20. J. CHADWICK u. M. GOLDHABER, Proc. Roy. Soc. London (A) **151** (1935) 479.
21. J. D. COCKCROFT u. W. B. LEWIS, Proc. Roy. Soc. London (A) **154** (1936) 261.
22. C. D. CORK, J. R. RICHARDSON, F. N. D. KURIE, Physic. Rev. **49** (1936) 208.
23. P. J. DEE, Proc. Roy. Soc. London (A) **136** (1932) 727.
24. M. DELBRÜCK, G. GAMOW, Z. Physik **72** (1931) 492.
25. H. DOLCH, Z. Physik **100** (1936) 401.
26. W. ECKART, Physic. Rev. **44** (1933) 109.
27. C. D. ELLIS, W. J. HENDERSON, Proc. Roy. Soc. London (A) **136** (1934) 206.
28. W. ELSASSER, J. Physique Radium **4** (1933) 549; **5** (1934) 389, 636.
29. E. FEENBERG, Physic. Rev. **47** (1935) 850, 857.
30. E. FEENBERG, J. KNIPP, Physic. Rev. **48** (1935) 906.
31. E. FERMI, Physic. Rev. **48** (1935) 570.
32. E. FERMI, Ricerca Scientifica 1936.
33. E. FERMI, Z. Physik. **88** (1934) 161.
34. R. FLEISCHMANN, W. BOTHE, Erg. d. exakten Naturwiss. **1935**.
35. S. FLÜGGE, Z. Physik **96** (1935) 459.

36. R. H. Fowler, Proc. Roy. Soc. London **123** (1930) 1.
37. W. A. Fowler, L. A. Delsasso, C. C. Lauritsen, Physic. Rev. **49** (1936) 561.
38. W. A. Fowler, L. A. Delsasso, C. C. Lauritsen, Physic. Rev. **48** (1935) 489.
39. R. Frisch, Nature **133** (1934) 721.
40. G. Gamow u. F. Houtermans, Z. Physik **52** (1928) 509.
41. G. Gamow, Proc. Roy. Soc. London (A) **126** (1930) 632.
42. G. Gamow, Der Bau des Atomkernes und die Radioaktivität. Leipzig 1931.
43. G. Gamow, Z. Physik **89** (1934) 592.
44. G. Gamow, Proc. Roy. Soc. London (A) **146** (1934) 217.
45. M. Goldhaber, Proc. Cambridge philos. Soc. **30** (1934) 561.
46. V. M. Goldschmidt, Naturwiss. **18** (1930) 999.
47. W. Gordon, Z. Physik **48** (1928) 180.
47a. O. Hahn, Ber. dtsch. chem. Ges. **69** A (1936) 5.
48. W. O. Harkins, Chem. Rev. **5** (1928) 371.
49. W. Heisenberg, Phys. Prinzipien der Quantentheorie. Leipzig 1930.
50. W. Heisenberg, Z. Physik **78** (1932) 156.
51. W. Heisenberg, Z. Physik **77** (1932) 1.
52. W. Heisenberg, Rapport du VIIième Congrès Solvay. Paris 1934. S. 289.
53. W. Heisenberg, Z. Physik **96** (1935) 473.
54. W. J. Henderson, Physic. Rev. **48** (1935) 855.
55. G. Hermann, Die naturphilosophischen Grundlagen der Quantenmechanik. Berlin 1935.
56. H. R. Hulme, Proc. Roy. Soc. London (A) **138** (1932) 643.
57. F. Hund, Z. Physik **43** (1927) 788.
58. P. Jordan, E. Wigner, Z. Physik **47** (1928) 631.
60. O. Klemperer, Proc. Roy. Soc. London (A) **148** (1935) 638.
61. E. J. Konopinski, G. E. Uhlenbeck, Physic. Rev. **48** (1935) 107.
62. E. J. Konopinski, G. E. Uhlenbeck, Physic. Rev. **48** (1935) 7.
63. H. A. Kramers, G. P. Ittmann, Z. Physik **58** (1929) 217.
64. F. N. D. Kurie, J. R. Richardson, H. C. Paxton, Physic. Rev. **49** (1936) 368.
65. L. Landau, Physik. Z. d. Sowjetunion **1** (1932) 88.
66. L. Landau (vgl. Bohr, Solvay-Kongr., Diskussionsbemerkung zum β-Zerfall).
67. A. Landé, Physic. Rev. **43** (1933) 620, 624.
68. E. Majorana, Z. Physik **82** (1933) 137.
69. J. Mattauch, Z. Physik **91** (1934) 361.
70. N. F. Mott, H. W. Massey, The Theory of Atomic Collisions. Oxford 1933.
71. N. F. Mott, Handb. d. Physik Bd. XXIV, 1. Teil. Berlin 1933.
72. N. F. Mott, Proc. Roy. Soc. London (A) **125** (1929) 222.
73. K. Nakabayasi, Z. Physik **97** (1935) 211.
74. M. L. E. Oliphant, Nature (1936).
75. M. L. E. Oliphant, A. E. Kempton, Lord Rutherford, Proc. Roy. Soc. London (A) **150** (1935) 244.
76. J. R. Oppenheimer, M. Phillips, Physic. Rev. **48** (1935) 500.
76a. K. Philipp, Kernspektren. Leipzig 1937.
77. F. Perrin, Comptes rendus **198** (1934) 2086.
78. J. J. Rabi, J. M. B. Kellog, J. R. Zacharias, Physic. Rev. **49** (1936) 421.
79. O. K. Rice, Physic. Rev. **35** (1930) 1538.

80. J. Rosenthal u. G. Breit, Physic. Rev. **41** (1932) 459. Vgl. Bethe (11a).
81. B. W. Sargent, Proc. Roy. Soc. London (A) **139** (1933) 659.
82. K. Schnetzler, Z. Physik **95** (1935) 302.
83. H. Schüler u. W. Schmidt, Z. Physik **98** (1936) 430.
84. H. Schüler u. H. Westmeyer, Naturwiss. **21** (1933) 561.
85. Th. Sexl, Z. Physik **99** (1936) 751.
86. O. Stern, J. Estermann, Z. Physik **85** (1933) 17.
87. J. Tamm, G. Iwanenko, Nature **133** (1934) 981.
88. H. M. Taylor, Proc. Roy. Soc. London (A) **136** (1932) 605.
89. H. M. Taylor, N. F. Mott, Proc. Roy. Soc. London (A) **138** (1932) 665.
90. H. M. Taylor, Proc. Cambridge philos. Soc. **32** (1936).
91. J. H. van Vleck, Physic. Rev. **48** (1935) 367.
92. F. S. Wang, Z. Physik **101** (1936).
93. C. F. v. Weizsäcker, Physik. Z. **36** (1935) 779.
94. C. F. v. Weizsäcker, Z. Physik **96** (1935) 431.
95. C. F. v. Weizsäcker, Z. Physik **102** (1936). Im Erscheinen.
96. M. G. White, Physic. Rev. **48** (1935) 481.
97. G. C. Wick, Nuovo Cimento **11** (1934) Nr. 4.
98. G. C. Wick, Rend. Accad. Lincei **19** (1934) 319.
99. G. C. Wick, Atti Accad. Lincei **21** (1935) 170.
100. E. Wigner, Physic. Rev. **43** (1933) 252.
101. F. L. Yost, J. A. Wheeler, G. Breit, Physic. Rev. **49** (1936) 174.

Namenregister

Sachregister

Kernspektren

Von Privatdoz. Dr. **K. Philipp,** Berlin-Dahlem

(*Hand- und Jahrbuch der chemischen Physik, Band 9, Abschnitt V)*
1937. XII, 99, 6 S. mit 42 Abb. RM. 11.20

Das Studium der Kernspektren, das dieser einzeln erhältliche Abschnitt des Hand- und Jahrbuchs der chemischen Physik behandelt, ist das wichtigste experimentelle Hilfsmittel zur Aufklärung des Aufbaus der Atomkerne. Es werden die Strahlungsäußerungen der natürlichen radioaktiven Prozesse und die künstlichen Kernprozesse (künstliche Radioaktivität) behandelt und dabei jeweils die Methoden der Untersuchung, der Ursprung der Zerfallsprozesse und die aus diesen folgenden Erkenntnisse und Zahlenwerte erörtert. Die Darstellung ist vorwiegend experimentell eingestellt und ergänzt hierdurch das Buch von Dr. v. Weizsäcker auf das Beste.

AUS DEM INHALT:

I. Die α-Strahlen

α-Zerfall — Geschwindigkeitsbestimmung — Weitreichende α-Strahlen — Feinstruktur

II. Die β-Strahlen

Geschwindigkeitsbestimmung

1. Die primären β-Strahlen: Zahl der Zerfallselektronen — Geschwindigkeitsspektrum — Kalorimetrische Bestimmung der Gesamtenergie — Beim künstlichen β-Zerfall ausgesandte Teilchen

2. Die sekundären β-Strahlen: Ursprung — Fremderregte β-Strahlspektren — Natürliche β-Strahlspektren

III. Die γ-Strahlen

Methoden und Ergebnisse — Wellenlängenbestimmung — Zeitpunkt der Aussendung der γ-Strahlen — Intensität der γ-Linien — Koeffizient der inneren Umwandlung — Gamows Theorie über den Ursprung der γ-Strahlen — Prüfung der Theorie durch Vergleich mit der Feinstruktur — Experimentelle Prüfung — Energiedifferenzen der weitreichenden α-Teilchen

IV. Kernspektren und Kerninneres

Theorie des β-Zerfalls — Kernniveaus

V. Weitere Erfahrungen aus künstlich eingeleiteten Kernprozessen

Künstliche Kernumwandlungen — Energiebilanz — Die durch α-Strahlen erzeugten diskreten Protonengruppen — Die durch Kanalstrahlen erzeugten diskreten Teilchengruppen — γ-Strahlung — Sekundäre β-Strahlspektren

---

Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. / Leipzig

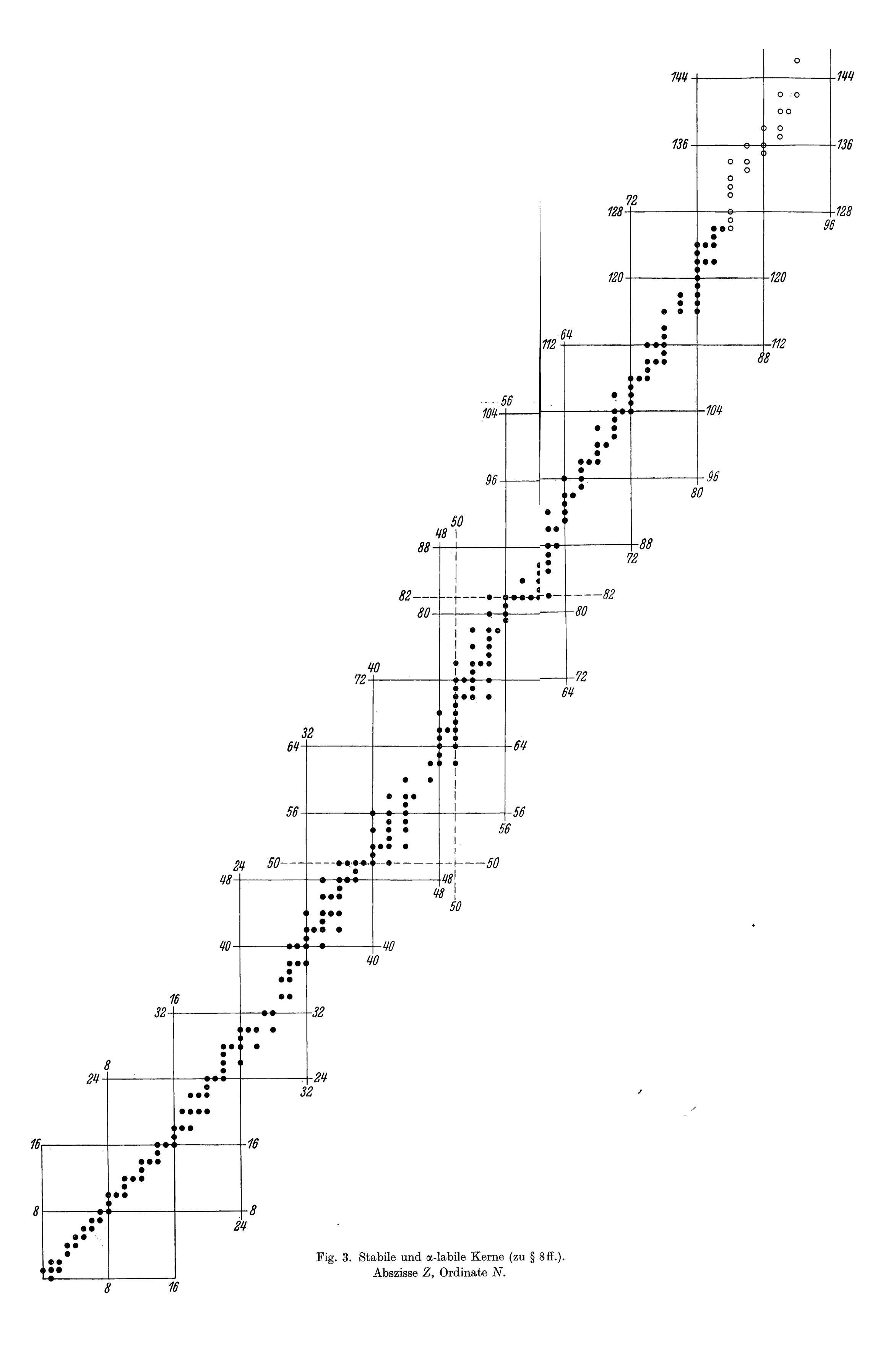


Fig. 3. Stabile und α-labile Kerne (zu § 8ff.).
Abszisse Z, Ordinate N.